Devoir 1

à remettre le 2 février 2018

Exercice 1. Donner une démonstration complète de l'énoncé suivant.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $x, y, z \in E$. Montrer que si x, y, z sont linéairement indépendants, alors $x+y, y+z, x+z$ sont linéairement indépendants.

N'oublier pas :

- ☐ d'écrire une introduction qui précise vos hypothèses et vos symboles ;
- ☐ d'expliquer ce que vous allez faire, et pourquoi il est suffisant ;
- ☐ d'écrire une conclusion résumant ce que vous avez fait ;
- ☐ de relire la démonstration pour vérifier que : le texte se lise facilement ; toutes les variables et tous les symboles sont définis ; les mathématiques sont correctes.

Exercice 2. Soit

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & -a-b \\ 0 & a \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} c & 0 \\ d & -c \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

a. Montrer que M est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. *($N$ est également un sous-espace vectoriel de $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, mais il n'est pas nécessaire de le montrer.)*

b. Trouver une base de M, N, $M+N$ et $M \cap N$.

Exercice 3. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2 et $f : E \to E$ une application linéaire telle que $f \circ f = -\mathrm{Id}_E$. Soit x un élément non nul de E.

a. Montrer qu'il n'existe pas de $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \alpha x$.

b. En déduire que $\mathcal{B} = (x, f(x))$ est une base de E.

c. Soit $y = \alpha x + \beta f(x)$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Exprimé $f(y)$ dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 4. Pour chaque énoncé, déterminer s'il est vrai ou faux. Justifier les réponses.

a. Soit $T : E \to E'$ une application linéaire entre deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
Si $(b_1, \ldots, b_n)$ est une base de E, alors $(T(b_1), \ldots, T(b_n))$ est une base de E'.

b. Il existe une application linéaire T de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad T\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad T\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$