Devoir 2

à remettre le 13 mars 2018

Exercice 1. Soit $\mathbb{R}_2[x]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus 2 à coefficients dans $\mathbb{R}$, et $L : \mathbb{R}_2[x] \to \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ l'application linéaire définie par

$$L(a + bx + cx^2) = \begin{bmatrix} b+c & a \\ b & c \end{bmatrix}.$$

Calculer la matrice de L dans les bases :

$$\mathcal{B} = \left\{1, x, 1 + x^2\right\} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{B}' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Exercice 2. Soit $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire dont la matrice dans les bases

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{B}' = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

est

$$[L]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

a. Déterminer la matrice de passage de la base $\mathcal{B}'$ à la base standard de $\mathbb{R}^2$.

b. Déterminer la matrice de passage de la base standard de $\mathbb{R}^3$ à la base $\mathcal{B}$.

c. Déterminer la matrice de L dans les bases standard de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et L et K deux endomorphismes de E tels que

$$L \circ L = 0, \qquad K \circ K = 0, \qquad \text{et} \qquad L \circ K + K \circ L = \mathrm{Id}_E\,.$$

a. Montrer que $E = \ker(L) \oplus \ker(K)$.

b. Soit $L|_{\ker(K)}$ la restriction de L à $\ker(K)$. Montrer que $L|_{\ker(K)}$ est un isomorphisme de $\ker(K)$ dans $\ker(L)$. (*Indice: montrer que son inverse est* $K|_{\ker(L)}$)

c. Montrer que si $\dim(E) = 2$, alors E possède une base dans laquelle L et K sont représentés par les matrices

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$