# Devoir 3

à remettre le 3 avril 2018

**Exercice 1.** Posons

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -7 & 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

*a.* Calculer le polynôme caractéristique de $M$.
*b.* Calculer le polynôme minimal de $M$.
*c.* Calculer les valeurs propres $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ de $M$.
*d.* Calculer un vecteur propre $v_i$ pour chaque valeur propre $\lambda_i$.
*e.* Soit $P$ la matrice dont les colonnes sont les vecteurs $v_1$, $v_2$, $v_3$. Calculer $P^{-1}MP$.

**Exercice 2.** Posons

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

*a.* Calculer le polynôme caractéristique de $N$.
*b.* Calculer le polynôme minimal de $N$.
*c.* Calculer les valeurs propres de $N$ et leurs multiplicités.
*d.* Calculer un base de chaque espace propre de $N$.
*e.* Si $N$ est diagonalisable, trouver une matrice $Q$ telle que $Q^{-1}NQ$ est diagonale ; sinon, trouver une matrice $Q$ telle que $Q^{-1}NQ$ est triangulaire supérieure.

**Exercice 3.** Soit $A$ une matrice carrée à coefficients réelles telle que

$$A^3 - 3A^2 - A + 3I_n$$

est la matrice nulle.

*a.* Montrer que $A$ est une matrice diagonalisable. (*Indice: polynôme minimal*)
*b.* Montrer que si $\lambda$ est une valeur propre de $A$, alors $\lambda$ est 0, 1, $-1$ ou 3.
*c.* Est-ce que $A$ est nécessairement inversible ? nécessairement non inversible ?

**Exercice 4.** Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie, et $L$ et $K$ deux endomorphismes de $E$ tels que

($i$) $L$ possède $\dim(E)$ valeurs propres distinctes, et
($ii$) tout vecteur propre de $L$ est aussi un vecteur propre de $K$.

Montrer que $L \circ K = K \circ L$.

(*Indice: Considérer une base de $E$ qui consiste de vecteurs propres de ... ?*)