notes du cours

Algèbre linéaire II

MAT1260 (Groupe 010) - Hiver 2017

Francesco Dolce

21 avril 2017

Ces notes sont en constante évolution et ne sont pas censé remplacer la présence en cours (qui en étant plus interactive, permet d'avoir des notes plus complètes).

Ce ficher est disponible à l'adresse web :
`http://lacim.uqam.ca/~francesco.dolce/ens/1617/mat1260.pdf`

Si vous trouvez des erreurs dans les notes du cours (et il n'y en a), envoyez-moi un courriel (`francesco.dolce@lacim.ca`) avec votre nom et la liste des fautes. Comme récompense, je m'engage à vous payer un café toutes les dix corrections au café étudiant *Sain Fractal*.

Table des matières

Chapitre 1

Espaces vectoriels

1.1 Vecteurs et scalaires

Soit $\mathbb{K}$ un corps (par exemple, $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$) [1]. Un $\mathbb{K}$-*espace vectoriel*, ou $\mathbb{K}$-*espace linéaire*, $\mathfrak{L}$ défini sur un corps $\mathbb{K}$ est un ensemble muni d'une application interne « + » (*addition*) :

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{L} \times \mathfrak{L} & \to & \mathfrak{L} \\ (\ell_1, \ell_2) & \mapsto & \ell_1 + \ell_2 \end{array}$$

et d'une application externe « $\cdot$ » (*multiplication par un scalaire*) :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{K} \times \mathfrak{L} & \to & \mathfrak{L} \\ (\alpha, \ell) & \mapsto & \alpha\ell \end{array}$$

qui satisfont aux axiomes suivants :

(a) $(\mathfrak{L}, +)$ est un groupe abélien, c-à-d :
- $\forall\, \ell_1, \ell_2, \ell_3 \in \mathfrak{L} \qquad (\ell_1 + \ell_2) + \ell_3 = \ell_1 + (\ell_2 + \ell_3)$ (associativité)
- $\forall\, \ell_2, \ell_2 \in \mathfrak{L} \qquad \ell_1 + \ell_2 = \ell_2 + \ell_1$ (commutativité)
- $\exists\, \vec{0}_{\mathfrak{L}} \in \mathfrak{L}$ t.q. $\forall\, \ell \in \mathfrak{L} \qquad \vec{0}_{\mathfrak{L}} + \ell = \ell$ (élément neutre)
- $\forall\, \ell \in \mathfrak{L} \quad \exists\, \tilde{\ell} \in \mathfrak{L}$ t.q. $\qquad \ell + \tilde{\ell} = \vec{0}_{\mathfrak{L}}$ (inverse [2])

(b) « $\cdot$ » vérifie les propriétés suivantes :
- $\forall\, \ell \in \mathfrak{L} \qquad 1_{\mathbb{K}} \cdot \ell = \ell$
- $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{K},\ \forall\, \ell \in \mathfrak{L} \qquad \alpha(\beta\ell) = (\alpha\beta)\ell$ (associativité mixte)
- $\forall\, \alpha \in \mathbb{K},\ \forall\, \ell_1, \ell_2 \in \mathfrak{L} \quad \alpha(\ell_1 + \ell_2) = \alpha\ell_1 + \alpha\ell_2$ (distributivité à gauche)
- $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{K},\ \forall\, \ell \in \mathfrak{L} \qquad (\alpha + \beta)\ell = \alpha\ell + \beta\ell$ (distributivité à droite)

Les éléments de $\mathfrak{L}$ sont appelés *vecteurs* tandis que les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés *scalaires*.

1. Dans ce cours on considère seulement des corps de caractéristique nulle, c'est-à-dire tels que $n \cdot 1_{\mathbb{K}} = 0_{\mathbb{K}}$ si et seulement si $n = 0$.
2. ou *opposé* en notation additive.

D'après les axiomes d'associativité et d'associativité mixte, on peut se passer de parenthèses et noter pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ et $\ell, \ell_1, \ell_2, \ell_3 \in \mathfrak{L}$

$$\ell_1 + \ell_2 + \ell_3 := (\ell_1 + \ell_2) + \ell_3 = \ell_1 + (\ell_2 + \ell_3)$$

et

$$\alpha\beta\ell := \alpha(\beta\ell) = (\alpha\beta)\ell.$$

Quand il n'y a pas d'ambiguïté dans le choix de l'espace vectoriel et du corps on dira que $\mathfrak{L}$ est espace vectoriel. De plus, on écrira $\vec{0}$ à la place de $\vec{0}_{\mathfrak{L}}$ et 0 et 1 à la place de $0_{\mathbb{K}}$ et $1_{\mathbb{K}}$ respectivement.

1.1.1 Premiers résultats

Comme corollaires immédiats, on a les résultats suivants.

Corollaire 1.1 *L'élément neutre de $\mathfrak{L}$ est unique.*

Preuve. Soient $\vec{0}, \vec{0}'$ deux éléments neutres de $\mathfrak{L}$. Alors

$$\vec{0} = \vec{0} + \vec{0}' = \vec{0}'.$$

■

On appelle *vecteur nul* de $\mathfrak{L}$ l'élément neutre $\vec{0}_{\mathfrak{L}}$.

Corollaire 1.2 *L'inverse d'un élément $\ell \in \mathfrak{L}$ est unique.*

Preuve. Soient $\tilde{\ell}, \tilde{\ell}'$ deux inverses de ℓ. Alors

$$\tilde{\ell} = \vec{0} + \tilde{\ell} = (\ell + \tilde{\ell}') + \tilde{\ell} = (\ell + \tilde{\ell}) + \tilde{\ell}' = \vec{0} + \tilde{\ell}' = \tilde{\ell}'.$$

■

On dénote avec $-\ell$ l'inverse d'un élément $\ell \in \mathfrak{L}$.

Corollaire 1.3 *Pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$ et pour tout $\ell \in \mathfrak{L}$*

$$0_{\mathbb{K}} \cdot \ell = \alpha \cdot \vec{0}_{\mathfrak{L}} = \vec{0}_{\mathfrak{L}}.$$

Preuve.

(i) $0\ell + 0\ell = (0+0)\ell = 0\ell \quad \Rightarrow \quad 0\ell = \vec{0}.$

(ii) $\alpha\vec{0} + \alpha\vec{0} = \alpha(\vec{0} + \vec{0}) = \alpha\vec{0} \quad \Rightarrow \quad \alpha\vec{0} = \vec{0}.$

■

Corollaire 1.4 *Pour tout $\ell \in \mathfrak{L}$*

$$(-1)_{\mathbb{K}} \cdot \ell = -\ell.$$

Preuve. $\ell + (-1)\ell = 1\ell + (-1)\ell = (1-1)\ell = 0\ell = \vec{0}$. ∎

Corollaire 1.5 *Si $\alpha \cdot \ell = \vec{0}$ pour $\alpha \in \mathbb{K}$ et $\ell \in \mathfrak{L}$, alors soit $\alpha = 0_{\mathbb{K}}$ soit $\ell = \vec{0}_{\mathfrak{L}}$.*

Preuve.
- ⋄ Si $\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha\ell = \vec{0}$ d'après le Corollaire 1.3.
- ⋄ Si $\alpha \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{0} = \alpha^{-1}\vec{0} = \alpha^{-1}(\alpha\ell) = (\alpha^{-1}\alpha)\ell = \ell$.

∎

1.1.2 Exemples d'espaces vectoriels

Les ensembles suivants sont des espaces vectoriels.

Exemple 1.6 $\mathfrak{L} = \{\vec{0}\}$.
- — $\vec{0} + \vec{0} = \vec{0} \in \mathfrak{L}$.
- — $a\vec{0} = \vec{0}$ pour tout $a \in \mathbb{K}$.

Exemple 1.7 $\mathfrak{L} = \mathbb{K}$.
- — $\alpha + \beta \in \mathbb{K}$ pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.
- — $\alpha\beta \in \mathbb{K}$ pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

Exemple 1.8 $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. En effet, on a
- — $(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d) \in \mathbb{C}$ pour tous $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.
- — $\lambda(a + ib) = \lambda a + i(\lambda b) \in \mathbb{C}$ por tous $\lambda, a, b \in \mathbb{R}$.

Exemple 1.9 $\mathbb{R}^2$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, si on définit, pour tout réels $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$

$$(\alpha_1, \beta_1) + (\alpha_2, \beta_2) := (\alpha_1 + \alpha_2, \beta_1 + \beta_2)$$

et pour tout $\lambda, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\lambda(\alpha, \beta) = (\lambda\alpha, \lambda\beta).$$

Par exemple, on a
- — $(3, 4) + (5, 0) = (8, 4)$.
- — $2(\pi, \frac{3}{4}) = (2\pi, \frac{3}{2})$.

Exemple 1.10 L'ensemble $\mathbb{K}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{K}\}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel si on définit :
- — $(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) := (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$.
- — $\lambda(x_1, \ldots, x_n) := (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$.
- — $\vec{0} = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{n})$.

Remarquez que l'Exemple 1.10 coïncide avec l'Exemple 1.7 pour $n = 1$ et avec l'Exemple 1.9 pour $n = 2$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Un autre exemple intéressant est le suivant.

Exemple 1.11 $\mathfrak{L} = \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{K}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a,b,c,d \in \mathbb{K} \right\}$ muni des opérations

— $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{pmatrix}$

— $\lambda \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix}$

Notons qu'il existe une bijection naturelle entre $\mathbb{K}^n$ et les matrices de la forme $n \times 1$ (et, évidemment, aussi avec les matrices de la forme $1 \times n$).

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{K}^n & \longleftrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) & \longleftrightarrow & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \end{array}$$

Pour cette raison, on se permettra l'abus de noter par $\vec{x}$ soit le n-uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{K}^n$ soit la matrice colonne $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ selon le contexte.

1.1.3 Espace fonctionnel

Soit S un ensemble et $\mathbb{K}$ un corps. L'ensemble $\mathcal{F}(S) = \{f : S \to \mathbb{K}\}$ des fonctions de S dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel avec les deux opérations

— pour tout $f, g \in \mathcal{F}(S)$ et pour tout $s \in S$

$$(f+g)(s) := f(s) + g(s)$$

— pour tout $f \in \mathcal{F}(S)$, pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$ et pour tout $s \in S$

$$(\alpha f)(s) := \alpha \cdot f(s)$$

et comme élément neutre de l'addition l'application

$$\begin{array}{rl} f_0 : & S \to \mathbb{K} \\ & s \mapsto 0 \end{array}$$

c'est-à-dire l'application qui envoie chaque élément $s \in S$ en $0_{\mathbb{K}}$.

Exemple 1.12 Soit $\mathbb{K}$ un corps.

L'ensemble $\mathcal{F}(\mathbb{K}^n) = \{f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}\}$ des fonctions de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel si on définit pour tout n-uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$ et tous $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{K}^n)$ les opérations

— $(f+g)(x_1, x_2, \ldots, x_n) := f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$,

— $(\alpha f)(x_1, x_2, \ldots, x_n) := \alpha f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

L'élément neutre de d'addition sera la fonction $f_0 : (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto 0$ pour tout $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$.

Considérons maintenant un ensemble S fini. Ce n'est pas restrictif de poser $S = \{1, 2, \ldots, n\}$. En effet, on peut toujours considérer une bijection entre les éléments de S et les premiers n entiers positifs, avec n la cardinalité de S. Toute fonction $f : S \mapsto \mathbb{K}$ est décrite à partir du n-uplet

$$(f(1), f(2), \ldots, f(n)) \in \mathbb{K}^n.$$

En effet, on a le résultat suivant.

Proposition 1.13 *Soient S un ensemble fini ayant n éléments et $\mathbb{K}$ un corps. Alors, il existe une bijection ϕ entre $\mathcal{F}(S)$ et $\mathbb{K}^n$.*

De plus, pour tout $f, g \in \mathcal{F}(S)$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$ on a

i) $\phi(f + g) = \phi(f) + \phi(g)$,

ii) $\phi(\alpha f) = \alpha\phi(f)$.

Preuve. Considérons l'application

$$\begin{array}{rccl} \phi : & \mathcal{F}(S) & \to & \mathbb{K}^n \\ & f & \mapsto & \big(f(1), f(2), \ldots, f(n)\big) \end{array}$$

L'application ϕ est bijective, en effet

— ϕ est injective, car pour tout $f, g \in \mathcal{F}(S)$ on a

$$\begin{array}{rcl} f \neq g & \Rightarrow & f(i) \neq g(i) \text{ pour un certain } 1 \leq i \leq n \\ & \Rightarrow & (f(1), f(2), \ldots, f(n)) \neq (g(1), g(2), \ldots, g(n)) \\ & \Rightarrow & \phi(f) \neq \phi(g). \end{array}$$

— ϕ est surjective, car pour tout $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$, on a $\vec{\alpha} = \phi(f_{\vec{\alpha}})$, où

$$\begin{array}{rccl} \phi_{\vec{\alpha}} : & S & \to & \mathbb{K}^n \\ & 1 & \mapsto & \alpha_1 \\ & 2 & \mapsto & \alpha_2 \\ & & \vdots & \\ & n & \mapsto & \alpha_n \end{array}$$

De plus, pour tout $f, g \in \mathcal{F}(S)$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$ on a

$$\begin{array}{rcl} \phi(f + g) & = & \big((f + g)(1), (f + g)(2) \ldots, (f + g)(n)\big) \\ & = & \big(f(1) + g(1), f(2) + g(2), \ldots, f(n) + g(n)\big) \\ & = & \big(f(1), f(2), \ldots, f(n)\big) + \big(g(1), g(2), \ldots, g(n)\big) \\ & = & \phi(f) + \phi(g) \end{array}$$

et

$$\begin{aligned}\phi(\alpha f) &= \big(\alpha f(1), \ldots, \alpha f(n)\big) \\ &= \alpha\big(f(1), \ldots, f(n)\big) \\ &= \alpha\phi(f)\end{aligned}$$

■

1.1.4 Isomorphisme d'espace vectoriels

On dit que deux espaces vectoriels $\mathfrak{L}_1$ et $\mathfrak{L}_2$ sont *isomorphes*, et on le dénote avec $\mathfrak{L}_1 \simeq \mathfrak{L}_2$, s'il existe une application bijective $\phi : \mathfrak{L}_1 \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \mathfrak{L}_2$ telle que

— $\forall\, \ell, m \in \mathfrak{L}_1 \quad \phi(\ell + m) = \phi(\ell) + \phi(m)$,

— $\forall\, \alpha \in \mathbb{K}$ et $\forall\, \ell \in \mathfrak{L}_2 \quad \phi(\alpha\ell) = \alpha\phi(\ell)$.

Donc, la Proposition 1.13 nous dit que pour tout ensemble S à n éléments, on a $\mathcal{F}(S) \simeq \mathbb{K}^n$.

Remarquez qu'il n y a pas de choix canonique d'isomorphisme. En effet, il existe au moins $n!$ isomorphismes entre $\mathcal{F}(S)$ et $\mathbb{K}^n$.

1.1.5 Combinaisons linéaires

Soient $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n$ des vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathfrak{L}$.

On appelle *combinaison linéaire* de $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n$ une somme du type

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \ell_i \;=\; \alpha_1\ell_1 + \alpha_2\ell_2 + \cdots + \alpha_n\ell_n$$

pour certains scalaires $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$.

En particulier, quand $n = 1$, on dit que le vecteur $\alpha\ell$, avec $\alpha \in \mathbb{K}$, est *colinéaire* à ℓ.

Exemple 1.14 Considérons le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^2$.

$$(\sqrt{2} - 1, 3\pi) = 3(0, \pi) + \frac{\sqrt{2}}{2}(2, \sqrt{2}) - (1, 1)$$

est une combinaison linéaire des vecteurs $(0, \pi), (2, \sqrt{2})$ et $(1, 1)$.

Exemple 1.15 Considérons le $\mathbb{Q}$ espace vectoriel $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{Q})$.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

est une combinaison linéaire des vecteurs $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exemple 1.16 Considérons le corps $\mathbb{Q}$ et l'espace fonctionnel $\mathbb{F}(S)$ avec $S = \{1, 2, \ldots, 10\}$. Alors

$$\frac{1}{3}f : i \mapsto \frac{f(i)}{3}$$

est un vecteur de $\mathcal{F}(S)$ colinéaire à f.

1.2 Sous-espaces vectoriels

Soit $\mathfrak{L}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Un sous-ensemble non vide $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{L}$ est dit un *sous-espace vectoriel* de $\mathfrak{L}$ si

(a) pour tous $m_1, m_2 \in \mathfrak{M} \qquad m_1 + m_2 \in \mathfrak{M}$,

(b) pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$ et tout $m \in \mathfrak{M} \qquad \alpha m \in \mathfrak{M}$.

Proposition 1.17 *Tout sous-espace vectoriel d'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel est lui même un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel.*

Preuve. Associativité, commutativité et propriétés de la multiplication par scalaire sont évidentes. (`Exercice`)

En utilisant le point b) de la définition on a que $\vec{0} = 0 \cdot m \in \mathfrak{M}$. Donc on peut choisir comme élément neutre de l'addition $\vec{0}_{\mathfrak{M}} = \vec{0}_{\mathfrak{L}}$.

De plus, pour tout $m \in \mathfrak{M}$, son inverse $-m = (-1) \cdot m \in \mathfrak{M}$. ■

Exemple 1.18 Pour tout espace vectoriel $\mathfrak{L}$, les sous-ensembles $\{\vec{0}\}$ et $\mathfrak{L}$ sont des sous-espaces vectoriels appelés les sous-espace vectoriels *triviaux* de $\mathfrak{L}$.

Exemple 1.19 Soit $\mathfrak{L} = \mathbb{K}^n$.

$\mathfrak{M} = \{(0, \ldots, 0, x_i, 0, \ldots, 0) \mid x_i \in \mathbb{K}\}$ est un sous-espace vectoriel appelé la i-ème *projection* de $\mathbb{K}^n$.

Exemple 1.20 Soit $\mathfrak{L} = \mathbb{K}^n$.

$\mathfrak{M} = \{(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) \mid x_i \in \mathbb{K}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{L}$.

L'exemple suivant généralise les Exemples 1.19 et 1.20.

Exemple 1.21 Soit $\mathfrak{L} = \mathbb{K}^n$ et $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$.

L'ensemble $\mathfrak{M}_{\vec{a}} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0\}$ défini par une contrainte linéaire est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.

En effet, $\mathfrak{M}_{\vec{a}} \neq \emptyset$ car le n-uplet $(0, 0, \ldots, 0) \in \mathfrak{M}_{\vec{\alpha}}$.

De plus, pour tout $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^n$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$ on a

— $a_1(x_1 + y_1) + \cdots + a_n(x_n + y_n) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{x} + \vec{y} \in \mathbb{K}^n$,

— $\alpha(a_1x_1 + a_nx_n) = \alpha 0 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \alpha\vec{x} \in \mathbb{K}^n$.

L'espace vectoriel $\mathfrak{M}_{\vec{a}}$ est appelé un *hyperplan* de $\mathbb{K}^n$.

1.2.1 Intersection d'espaces vectoriels

Une autre façon de construire des espaces vectoriels est de prendre l'intersection entre deux ou plus espaces vectoriels qu'on a déjà.

Proposition 1.22 *Soit* $\mathfrak{M}_1, \ldots \mathfrak{M}_k \subset \mathfrak{L}$ *des sous-espaces vectoriels de* $\mathfrak{L}$*. Alors* $\mathfrak{M} = \bigcap_{i=1}^{k} \mathfrak{M}_i$ *est aussi un sous-espace vectoriel.*

Preuve. Pour tout $\ell, m \in \mathfrak{M}$ on a

$$\begin{aligned} \ell, m \in \mathfrak{M}_i \text{ pour tout } i = 1, \ldots, k \quad &\Longrightarrow \quad \ell + m \in \mathfrak{M}_i \text{ pour tout } i \in \{1, 2, \ldots, k\} \\ &\Longrightarrow \quad \ell + m \in \mathfrak{M}. \end{aligned}$$

De plus, pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$ et $m \in \mathfrak{M}$ on a

$$\begin{aligned} m \in \mathfrak{M}_i \text{ pour tout } i = 1, \ldots, k \quad &\Longrightarrow \quad \alpha m \in \mathfrak{M}_i \text{ pour tout } i = 1, \ldots, k \\ &\Longrightarrow \quad \alpha m \in \mathfrak{M}. \end{aligned}$$

■

Exemple 1.23 Considérons $\mathbb{R}^3$ comme espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Soit

$$\mathfrak{M} = \{(x, y, z) \mid x + 2y = 0\}$$

et

$$\mathfrak{N} = \{(x, y, z) \mid y - z = 0\}.$$

D'après la section précédente, les deux ensembles $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Leur intersection

$$\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N} = \{(-2y, y, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$$

est lui aussi un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Corollaire 1.24 *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix}_{k \times n} .$$

L'ensemble

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_A &= \{\vec{x} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid A\vec{x} = 0\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} a_{11}x_1 + \cdots a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + \cdots a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{k1}x_1 + \cdots a_{kn}x_n = 0 \end{array} \right\} \end{aligned}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$*.*

Preuve. Posons $\vec{\alpha_i} = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}$ pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$.

Pour tout i, l'hyperplan $\mathfrak{M}_{\vec{\alpha_i}} = \{\vec{x} \mid \alpha_i^\top \vec{x} = 0\}$ est un sous-espace vectoriel (voir Exemple 1.21).

Or, $\mathfrak{M}_A = \bigcap_{i=1}^{k} \mathfrak{M}_{\vec{\alpha_i}}$, d'où le résultat d'après la Proposition 1.22. ∎

Comme $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \simeq \mathbb{K}^n$, le Corollaire 1.24 nous dit que l'intersection d'hyperplans dans $\mathbb{K}^n$ est un sous-espace vectoriel.

1.2.2 Somme d'espaces vectoriels

Soit $\mathfrak{M}, \mathfrak{N} \subset \mathfrak{L}$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathfrak{L}$. On appelle *somme* de $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ l'ensemble

$$\mathfrak{M} + \mathfrak{N} := \{\ell \in \mathfrak{L} \mid \ell = m + n, \text{ avec } m \in \mathfrak{M}, n \in \mathfrak{N}\}.$$

Proposition 1.25 *L'ensemble $\mathfrak{M} + \mathfrak{N}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{L}$.*

Preuve. Pour tout $\ell_1 = m_1 + n_1$ et $\ell_2 = m_2 + n_2 \in \mathfrak{M} + \mathfrak{N}$ on a

$$\ell_1 + \ell_2 = (m_1 + n_1) + (m_2 + n_2) = (m_1 + m_2) + (n_2 + n_2) \in \mathfrak{M} + \mathfrak{N}.$$

De même, pour tout $\ell = m + n \in \mathfrak{M} + \mathfrak{N}$ et tout $\alpha \in \mathbb{K}$ on a

$$\alpha\ell = \alpha(m + n) = (\alpha m) + (\alpha n) \in \mathfrak{M} + \mathfrak{N}.$$

∎

Comme $\vec{0} \in \mathfrak{N}$, pour tout vecteur $m \in \mathfrak{M}$ on a $m = m + \vec{0} \in \mathfrak{M} + \mathfrak{N}$. Donc $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M} + \mathfrak{N}$. Symétriquement, $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M} + \mathfrak{N}$.

Exemple 1.26 Considérons le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ et ses deux sous-espaces vectoriels $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$, définis par

$$\mathfrak{M} = \{(x, y, 0, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

et

$$\mathfrak{N} = \{(0, z, t, 0) \mid z, t \in \mathbb{R}\}.$$

La somme $\mathfrak{M} + \mathfrak{N}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. En particulier, on a

$$\mathfrak{M} + \mathfrak{N} = \{(x, y, z, 0) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}.$$

Par exemple, on peut écrire l'élément $(3, 2, 1, 0) = (3, 1, 0, 0) + (0, 1, 1, 0)$.

Remarquez que cette écriture n'est pas unique, en effet on a aussi $(3, 2, 1, 0) = (3, 3, 0, 0) + (0, -1, 1, 0)$.

1.2.3 Sous-espaces vectoriels engendrés

Proposition 1.27 *Soit $\mathfrak{L}$ un espace vectoriel, $n \geq 1$ et $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n \in \mathfrak{L}$. L'ensemble de toutes les combinaison linéaire de $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n$ est un sous-espace vectoriel.*

Preuve. Posons $\mathfrak{M} = \{\alpha_1\ell_1 + \alpha_2\ell_2 + \cdots + \alpha_n\ell_n \mid \alpha_i \in \mathbb{K}\}$.

Il est facile à démontrer, par récurrence sur n, que toute combinaison linéaire de $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n$ est un élément de $\mathfrak{L}$. Donc $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{L}$.

Soit $m_1 = \alpha_1\ell_1 + \alpha_2\ell_2 + \cdots + \alpha_n\ell_n$ et $m_2 = \beta_1\ell_1 + \beta_2\ell_2 + \cdots + \beta_n\ell_n$ deux éléments de $\mathfrak{M}$ et soit $\gamma \in \mathbb{K}$. Alors

$$\begin{aligned} m_1 + m_2 &= (\alpha_1\ell_1 + \alpha_2\ell_2 + \cdots + \alpha_n\ell_n) + (\beta_1\ell_1 + \beta_2\ell_2 + \cdots + \beta_n\ell_n) \\ &= (\alpha_1 + \beta_1)\ell_1 + (\alpha_2 + \beta_2)\ell_2 + \cdots + (\alpha_n + \beta_n)\ell_n \in \mathfrak{M} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \gamma \cdot m_1 &= \gamma \cdot (\alpha_1\ell_1 + \alpha_2\ell_2 + \cdots + \alpha_n\ell_n) \\ &= (\gamma\alpha_1)\ell_1 + (\gamma\alpha_2)\ell_2 + \cdots + (\gamma\alpha_n)\ell_n \in \mathfrak{M}. \end{aligned}$$

■

L'espace vectoriel défini dans la Proposition 1.27 est appelé l'espace *engendré* par les vecteur $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n$ et se dénote par $\operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{\ell_1, \ldots, \ell_n\}$, ou simplement $\operatorname{span}\{\ell_1, \ldots, \ell_n\}$ quand il n'y a pas d'ambiguïtés.

Formallement, on a

$$\operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n\} := \left\{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\ell_i \mid \alpha_i \in \mathbb{K}\right\}. \tag{1.1}$$

Proposition 1.28 *Soit $\mathfrak{M} = span\{x_1, \ldots, x_m\}$ et $\mathfrak{N} = span\{y_1, \ldots, y_n\}$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathfrak{L}$. Alors*

$$\mathfrak{M} + \mathfrak{N} = span\{x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n\}.$$

Preuve. Pour tout $i = 1, \ldots, m$, le vecteur x_i appartient à $\mathfrak{M}$ et donc a $\mathfrak{M} + \mathfrak{N}$. De même, pour tout $j = 1, \ldots, n$ le vecteur y_j appartient à $\mathfrak{M} + \mathfrak{N}$.

Comme $\mathfrak{M} + \mathfrak{N}$ est un espace vectoriel, toute combinaison linéaire des vecteurs $x_1, \ldots, x_m$, $y_1, \ldots, y_n$ appartient à $\mathfrak{M} + \mathfrak{N}$. Donc

$$\operatorname{span}\{x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n\} \subset \mathfrak{M} + \mathfrak{N}.$$

Réciproquement, tout élément $\ell \in \mathfrak{M} + \mathfrak{N}$ s'écrit comme somme $\ell = m + n$ avec $m \in \mathfrak{M}$ et $n \in \mathfrak{N}$. Or, $m \in \operatorname{span}\{x_1, \ldots, x_n\}$ et $n \in \operatorname{span}\{y_1, \ldots, y_n\}$, donc $\ell \in \operatorname{span}\{x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m\}$, ce qui implique que

$$\mathfrak{M} + \mathfrak{N} \subset \operatorname{span}\{x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n\}.$$

Donc on a l'égalité. ■

Comme on l'a remarqué ci-dessus, pour un même vecteur $\ell \in \mathfrak{L}$ il existe, en général, plusieurs couples possibles de vecteurs $m \in \mathfrak{M}$ et $n \in \mathfrak{N}$ tels que $\ell = m + n$. Cela n'est pas toujours le cas, comme on montrera dans la section suivante.

1.2.4 Supplémentaire et somme directe

Soit $\mathfrak{L}$ un espace vectoriel et $\mathfrak{M}, \mathfrak{N} \subset \mathfrak{L}$ deux sous-espaces vectoriels.

On dit que $\mathfrak{M}$ est un *supplémentaire* de $\mathfrak{N}$ (ou que $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ sont *supplémentaires*) si tout vecteur $\ell \in \mathfrak{L}$ s'écrit de façon unique comme somme d'un vecteur $m \in \mathfrak{M}$ et d'un vecteur $n \in \mathfrak{N}$.

Dans ce cas, on dira que $\mathfrak{L}$ est une *somme directe* des espaces $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ et on écrira $\mathfrak{L} = \mathfrak{M} \oplus \mathfrak{N}$.

Proposition 1.29 *Deux sous-espaces vectoriels $\mathfrak{M}, \mathfrak{N} \subset \mathfrak{L}$ sont supplémentaires si et seulement si $\mathfrak{L} = \mathfrak{M} + \mathfrak{N}$ et $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N} = \{0\}$.*

Preuve. Supposons d'abord que $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ soient supplémentaires.

Alors tout $\ell \in \mathfrak{L}$ s'écrit comme une somme du type $\ell = m_\ell + n_\ell \in \mathfrak{M} + \mathfrak{N}$ avec $m_\ell \in \mathfrak{M}$ et $n_\ell \in \mathfrak{N}$. Cela implique que $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{M} + \mathfrak{N} \subset \mathfrak{L}$, d'où $\mathfrak{L} = \mathfrak{M} + \mathfrak{N}$.

De plus, on a $0_{\mathfrak{L}} = 0_{\mathfrak{M}} = 0_{\mathfrak{N}} \in \mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}$. Pour tout $\ell \in \mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}$ on peut écrire $\ell = \ell + 0_{\mathfrak{N}} = 0_{\mathfrak{M}} + \ell$. Comme cette écriture est unique, on a forcément $\ell = 0$.

Supposons maintenant que $\mathfrak{L} = \mathfrak{M} + \mathfrak{N}$ et que $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N} = \{0\}$. Montrons que tout $\ell \in \mathfrak{L}$ s'écrit de façon unique comme une somme d'un élément de $\mathfrak{M}$ et d'un élément de $\mathfrak{N}$. En effet, si $\ell = m_1 + n_1 = m_2 + n_2$, avec $m_1, m_2 \in \mathfrak{M}$ et $n_1, n_2 \in \mathfrak{N}$, alors

$$m_1 - m_2 = n_2 - n_1 \in \mathfrak{M} \cap \mathfrak{N} = \{0\},$$

donc $m_1 = m_2$ et $n_1 = n_2$. Cela implique que $\mathfrak{L} = \mathfrak{M} \oplus \mathfrak{N}$. ■

1.3 Indépendance linéaire et bases

1.3.1 Vecteurs linéairement indépendants

Soit $\mathfrak{L}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On dit que les vecteurs $\ell_1, \dots, \ell_n \in \mathfrak{L}$, avec $n \geq 1$ sont *linéairement indépendants* si pour tous $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ on a

$$\alpha_1 \ell_1 + \cdots + \alpha_n \ell_n = \vec{0} \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0. \tag{1.2}$$

D'après la définition on déduit, en particulier pour $n = 1$, qu'un vecteur $\ell \in \mathfrak{L}$ est linéairement indépendant si et seulement si $\ell \neq \vec{0}$.

Exemple 1.30 Considérons le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$. Les deux vecteurs 1 et i sont linéairement indépendants car $\alpha + \beta i = 0$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ si et seulement si $\alpha = \beta = 0$.

Remarquez que les deux vecteurs ne sont pas linéairement indépendants si on considère $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, car $i \cdot 1 + (-1) \cdot i = 0$.

Exemple 1.31 Considérons le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$. Les vecteurs $(2, 0, 0)$ et $(0, 0, 1)$ sont linéairement indépendants. En effet, on a

$$a(2, 0, 0) + b(0, 0, 1) = (0, 0, 0) \iff (2a, 0, b) = (0, 0, 0) \iff a = b = 0.$$

Proposition 1.32 *Soit $\mathfrak{L}$ un espace vectoriel et $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n$ des vecteurs linéairement indépendants de $\mathfrak{L}$.*

i) Pour tout i on a $\ell_i \neq \vec{0}$.

ii) Pour tous $i \neq j$ on a $\ell_i \neq \ell_j$.

iii) Toute sous-famille $\{\ell_{k_1}, \ell_{k_2}, \ldots, \ell_{k_h}\} \subset \{\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n\}$ est linéairement indépendante.

Preuve.

i) Supposons par l'absurde que $\ell_i = \vec{0}$ pour un certain i. Alors, on a

$$0\ell_1 + \cdots + 0\ell_{i-1} + 1\ell_i + 0\ell_{i+1} + \cdots + 0\ell_n = \vec{0}$$

avec $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) \neq (0, 0, \ldots, 0)$, ce qui contredit l'hypothèse d'indépendance linéaire des vecteurs $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n$.

ii) Supposons par l'absurde que $\ell_i = \ell_j$ avec $i \neq j$. Alors, on a

$$0\ell_1 + 0\ell_2 + \cdots + 1\ell_i + \cdots + (-1)\ell_j + \cdots + 0\ell_n = \vec{0}$$

avec $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0, -1, 0, \ldots, 0) \neq (0, 0, \ldots, 0)$, ce qui contredit l'hypothèse d'indépendance linéaire des vecteurs $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n$.

iii) Pour toute sous-famille $\{\ell_{k_1}, \ell_{k_2}, \ldots, \ell_{k_h}\}$ de $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n$ on a

$$\sum_{j=1}^{h} \alpha_{k_j} \ell_{k_j} = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} \beta_i \ell_i = \vec{0}$$

où $\beta_i = \alpha_i$ pour tout $i = k_1, k_2, \ldots, k_h$ et $\beta_i = 0$ sinon. D'après l'indépendance linéaire de $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n$ on a que tous les β_i, et donc en particulier tous les α_i sont nuls.

$\blacksquare$

Proposition 1.33 *Soient $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n \in \mathfrak{L}$ des vecteurs.*

Les vecteurs $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n$ sont linéairement indépendants si et seulement si aucun des ℓ_i ne peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres.

Preuve. Soient $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n$ linéairement indépendants. Supposons, par l'absurde, qu'il existe ℓ_j tel qu'il puisse s'écrire comme combinaison linéaire des autres vecteurs de ℓ_i avec $i \neq j$.

C'est-à-dire qu'ils existent des scalaires $\alpha_1, \ldots, \alpha_{j-1}, \alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_n$ tels que

$$\ell_j = \sum_{i \neq j} \alpha_i \ell_i \quad \iff \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \ell_i = \vec{0} \quad \text{avec } \alpha_j = -1.$$

Donc $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \neq (0, 0, \ldots, 0)$, ce qui contredit l'hypothèse selon laquelle $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n$ soient linéairement indépendants.

Supposons maintenant que $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n$ ne soient pas linéairement indépendants. Donc il existe $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \neq (0, 0, \ldots, 0)$ tel que

$$\beta_1 \ell_1 + \beta_2 \ell_2 + \cdots \beta_n \ell_n = \vec{0}.$$

Comme $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \neq (0, 0, \ldots, 0)$, en particulier il existe un $\beta_j \neq 0$. Donc

$$\ell_j + \sum_{i \neq j} \left(\frac{\beta_i}{\beta_j} \right) \ell_i = \vec{0} \quad \iff \quad \ell_j = \sum_{i \neq j} \alpha_i \ell_i \quad \text{avec } \alpha_i = -\frac{\beta_i}{\beta_j}.$$

■

1.3.2 Bases

Considérons un espace vectoriel $\mathfrak{L} \neq \{\vec{0}\}$.

Une *base* (finie) de $\mathfrak{L}$ est un n-uplet de vecteurs $(e_1, e_2, \ldots, e_n) \in \mathfrak{L}^n$, avec $n \geq 1$, tel que chaque vecteur $\ell \in \mathfrak{L}$ s'écrit de façon unique dans la forme

$$\ell = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots \alpha_n e_n$$

avec $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$.

L'unicité signifie que pour tout $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{K}$ on a

$$\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n = \beta_1 e_1 + \cdots + \beta_n e_n \quad \Longrightarrow \quad \alpha_i = \beta_i \text{ pour tout } i \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Les scalaires dans l'n-uplet $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ sont appelés les *coordonnées* de ℓ relatives à la base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$.

Remarquez que pour tous vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y} \in \mathfrak{L}$ de coordonnées respectivement $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ et $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$, le vecteur $\vec{x} + \vec{y}$ a coordonnées

$$(\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \ldots, \alpha_n + \beta_n).$$

De même, pour tout scalaire $\gamma \in \mathbb{K}$, le vecteur $\gamma \vec{x}$ a coordonnées

$$(\gamma \alpha_1, \gamma \alpha_2, \ldots, \gamma \alpha_n).$$

Exemple 1.34 Considérons un corps non vide $\mathbb{K}$ comme espace vectoriel sur lui-même. Pour tout vecteur $\ell \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, le 1-uplet (ℓ) est une base de $\mathbb{K}$.

En effet, tout vecteur $m \in \mathbb{K}$ peut s'écrire comme

$$m = \left(\frac{m}{\ell}\right) \cdot \ell,$$

avec $\frac{m}{\ell} \in \mathbb{K}$. De plus, si $\alpha\ell = \beta\ell$, alors $\alpha = \beta$.

Exemple 1.35 Considérons le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}^n$.

Le n-uplet $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \ldots, \vec{e_n})$, où

$$\vec{e_i} = (0, \cdots, 0, \underset{i}{1}, 0, \cdots, 0) \in \mathbb{K}^n$$

est une base de $\mathbb{K}^n$. En effet, pour tout $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ on a

$$\vec{x} = x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2} + \cdots + x_n\vec{e_n}.$$

De plus,

$$x_1\vec{e_1} + \cdots + x_n\vec{e_n} = y_1\vec{e_1} + \cdots = y_n\vec{e_n} \quad \Leftrightarrow \quad (x_1, \ldots x_n) = (y_1, \ldots, y_n).$$

Cette base est appelée la *base standard* (ou *canonique*) de $\mathbb{K}^n$.

Remarquez que si $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base d'un espace vectoriel $\mathfrak{L}$, alors pour toute permutation $\pi \in \mathfrak{S}_n$ [3], le n-uplet

$$\left(e_{\pi(1)}, e_{\pi(2)}, \ldots, e_{\pi(n)}\right)$$

est aussi une base de $\mathfrak{L}$. Les coordonnées relatives à la nouvelle base seront simplement les coordonnées de la première base permutées par π.

Exemple 1.36 Considérons le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$. D'après l'Exemple 1.35 on sait que le triplet $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ avec

$$\vec{e_1} = (1, 0, 0), \quad , \vec{e_2} = (0, 1, 0), \quad , \vec{e_3} = (0, 0, 1),$$

est une base de $\mathbb{R}^3$. Une autre base est donnée par $(\vec{e_2}, \vec{e_3}, \vec{e_1})$.

Par exemple, le vecteur $(5, 8, 13) \in \mathbb{R}^3$ peut s'écrire comme

$$5\vec{e_1} + 8\vec{e_2} + 13\vec{e_3} \;=\; 8\vec{e_2} + 13\vec{e_3} + 5\vec{e_1}.$$

Exemple 1.37 Soit $\mathbb{K}$ un corps. Considérons le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{K})$. Le quadruplet $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ où

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

3. $\mathfrak{S}_n$ est le groupe des permutations sur n éléments.

est une base de $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{K})$.

En effet, pour tout $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{K})$ on a

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De plus, pour tout α_i, β_i, avec $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, on a

$$\alpha_1 E_{11} + \alpha_2 E_{12} + \alpha_3 E_{21} + \alpha_4 E_{22} = \beta_1 E_{11} + \beta_2 E_{12} + \beta_3 E_{21} + \beta_4 E_{22}$$

si et seulement si $\alpha_i = \beta_i$ pour tout $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Exemple 1.38 On peut généraliser l'exemple précédent d'une façon naturelle en considérant le $(n \times m)$-uplet $(E_{11}, E_{12}, \ldots, E_{ij}, \ldots, E_{nm})$ où

$$E_{ij} = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccccc} & & & j & & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Cette base est dite la *base standard* (ou *canonique*) de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$.

L'exemple suivant est un cas particulier de l'Exemple 1.38.

Exemple 1.39 Soit $\mathbb{K}$ un corps et $E_1, E_2, \ldots, E_n$ les vecteurs colonnes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ définis par

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \cdots, \quad E_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

D'après l'Exemple 1.38, le n-uplet $(E_1, E_2, \ldots, E_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. De plus, $(E_1^\top, E_2^\top, \ldots, E_n^\top)$ est une base de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$.

Remarquez que, comme $\mathbb{K}^n$ est isomorphe à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, on retrouve le résultat de l'Exemple 1.35.

1.3.3 Caractérisation d'une base finie

D'après la définition, on a que tous les éléments d'une base sont différents entre eux. En effet, on peut montrer une propriété plus forte.

Théorème 1.40 *Soit $\mathfrak{L} \neq \{\vec{0}\}$ un espace vectoriel et $e_1, e_2, \ldots, e_n \in \mathfrak{L}$.*

$(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base de $\mathfrak{L}$ si et seulement si les vecteurs $e_1, e_2, \ldots, e_n$ sont linéairement indépendantes et span$\{e_1, e_2, \ldots, e_n\} = \mathfrak{L}$.

Preuve. Supposons d'abord que $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ soit une base de $\mathfrak{L}$.

Comme tout vecteur de $\mathfrak{L}$ s'écrit comme combinaison linéaire de $e_1, e_2, \ldots, e_n$ on a $\mathfrak{L} \subset \text{span}\{e_1, e_2, \ldots, e_n\} \subset \mathfrak{L}$, d'où l'égalité.

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots \alpha_n e_n = \vec{0} = 0e_1 + 0e_2 + \cdots 0e_n.$$

Alors, par l'unicité de l'écriture, on a $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$. Donc les vecteurs $e_1, e_2, \ldots, e_n$ sont linéairement indépendants.

Réciproquement, supposons que $e_1, e_2, \ldots, e_n$ soient des vecteurs linéairement indépendants de $\mathfrak{L}$ et que span$\{e_1, e_2, \ldots, e_n\} = \mathfrak{L}$.

Comme l'espace engendré par les vecteurs est tout l'espace $\mathfrak{L}$, tout vecteur $\ell \in \mathfrak{L}$ peut s'écrire comme combinaison linéaire de $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

Soit $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ et $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ deux n-uplets tels que

$$\ell = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots \alpha_n e_n = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \cdots \beta_n e_n.$$

Alors on a

$$(\alpha_1 - \beta_1)e_1 + (\alpha_2 - \beta_2)e_2 + \cdots (\alpha_n + \beta_n)e_n = \vec{0}.$$

Or, $e_1, e_2, \ldots, e_n$ sont linéairement indépendants. Donc $\alpha_i - \beta_i = 0$ pour tout i, et donc $\alpha_i = \beta_i$ pour tout i. ■

Le résultat suivant est facile à démontrer mais très importants.

Proposition 1.41 *Soit $\mathfrak{L} \neq \{\vec{0}\}$ un espace vectoriel et $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base finie de $\mathfrak{L}$.*

i) Toute famille de vecteurs $\{e_{k_1}, e_{k_2}, \ldots, e_{k_h}\} \subset \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ est linéairement indépendante.

ii) Soit $e_{n+1} \in \mathfrak{L}$ un vecteur quelconque. Alors l'ensemble $\{e_1, e_2, \ldots, e_n, e_{n+1}\}$ engendre $\mathfrak{L}$.

Preuve.

i) La première partie de l'énoncé suit du point (*iii*) de la Proposition 1.32.

ii) Pour démontrer la seconde partie de l'énoncé il suffit de remarquer que chaque vecteur $\ell \in \mathfrak{L}$ peut s'écrire comme

$$\ell = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots \alpha_n e_n + 0e_{n+1},$$

pour certains $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$.

■

1.4 Espaces vectoriels de dimension finie

1.4.1 Dimension

Théorème 1.42 *Soit $\mathfrak{L}$ un espace vectoriel qui admet une base finie.*

Alors le nombre de vecteurs qui forment une base de $\mathfrak{L}$ ne dépend pas du choix de la base.

Preuve. Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base finie de $\mathfrak{L}$.

Supposons par l'absurde qu'il existe une autre base $(e'_1, e'_2, \ldots, e'_m)$ de $\mathfrak{L}$ avec $m > n$. Nous allons montrer qu'il existe des scalaires $(x_1, x_2, \ldots, x_m) \neq (0, 0, \ldots, 0)$ tels que :

$$x_1 e'_1 + x_2 e'_2 + \cdots + x_m e'_m = \vec{0}. \tag{1.3}$$

Cela contredira l'hypothèse que $(e'_1, e'_2, \ldots, e'_m)$ soit une base.

Puisque $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base, chaque vecteur e'_i peut s'écrire comme combinaison linéaire de $e_1, e_2, \ldots, e_n$. C'est-à-dire qu'il existe des scalaires $\alpha_{ij} \in \mathbb{K}$ avec $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$ tels que

$$\left\{\begin{array}{ccc} e'_1 & = & \alpha_{11}e_1 + \alpha_{12}e_2 + \cdots + \alpha_{1n}e_n \\ e'_2 & = & \alpha_{21}e_1 + \alpha_{22}e_2 + \cdots + \alpha_{2n}e_n \\ \vdots & & \\ e'_m & = & \alpha_{m1}e_1 + \alpha_{m2}e_2 + \cdots + \alpha_{mn}e_n \end{array}\right.$$

Considérons donc l'Équation (1.3) à m inconnues. On a

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\sum_{i=1}^{m} x_i e'_i & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} x_i \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} e_k \right) \\ & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} (\alpha_{ik} x_i e_k) \\ & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ik} x_i \right) e_k = \vec{0}. \end{array}$$

Comme $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base, cela implique que l'on a le système de n équations à m inconnues suivant

$$\left\{\begin{array}{c} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{21}x_2 + \cdots + \alpha_{m1}x_m = 0 \\ \alpha_{12}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \cdots + \alpha_{m2}x_m = 0 \\ \vdots \\ \alpha_{1n}x_1 + \alpha_{2n}x_2 + \cdots + \alpha_{mn}x_m = 0 \end{array}\right.$$

Comme $n < m$, il existe une infinité de solutions. En particulier il existe une solution $(\widetilde{x_1}, \widetilde{x_2}, \ldots, \widetilde{x_m}) \neq (0, 0, \ldots, 0)$ telle que l'Équation (1.3) est vérifiée. ■

Soit $\mathfrak{L}$ un espace vectoriel qui admet une base finie $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$. On appelle *dimension* (sur $\mathbb{K}$) le nombre n de vecteurs de cette base. On dénote la dimension de $\mathfrak{L}$ avec $\dim_{\mathbb{K}}(\mathfrak{L})$, ou $\dim(\mathfrak{L})$ quand il n'y a pas d'ambiguïté sur le choix du corps.

Si $\mathfrak{L} = \{\vec{0}\}$ on dit que $\mathfrak{L}$ est de *dimension zéro* et on écrit $\dim(\mathfrak{L}) = 0$.

Corollaire 1.43 *Soit $\mathfrak{L}$ un espace vectoriel de dimension n et $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_p$ des vecteurs de $\mathfrak{L}$.*

a) Si $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_p$ sont linéairement indépendants alors $p \leq n$.

b) Si $p > n$, alors $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_p$ sont linéairement dépendants.

Exemple 1.44 Le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}^n$ a dimension n.

En effet, le n-uplet $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \ldots, \vec{e_n})$ est une base de $\mathbb{K}^n$ d'après l'Exemple 1.35.

Donc la dimension (finie) d'un espace vectoriel $\mathfrak{L}$ est le nombre maximal n tel que n vecteurs de $\mathfrak{L}$ puissent être linéairement indépendants.

Exemple 1.45 D'après l'Exemple 1.38, l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ a dimension $m \cdot n$ sur $\mathbb{K}$.

Exemple 1.46 D'après l'Exemple 1.34, on sait que l'espace vectoriel $\mathbb{C}$ a dimension 1 sur $\mathbb{C}$.

D'autre part, si l'on considère $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{R}$ espace vectoriel, ceci a dimension 2. En effet, le doublet $(1, i)$ est une base de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{R}$.

Un espace vectoriel de dimension 1 est appelé une *droite (vectorielle)*. Un espace vectoriel de dimension 2 est appelé un *plan (vectoriel)*.

Exemple 1.47 $\mathbb{C}$ est un plan vectoriel si vu comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel mais une droite vectorielle si vu comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel (voir Exemple 1.46).

1.4.2 Complétion de base

Étant donné une famille de vecteurs linéairement indépendants, on peut toujours ajouter des vecteurs pour trouver une base. Avant de démontrer ce résultat, on a besoin du lemme suivant.

Lemme 1.48 *Soit $\mathfrak{L}$ un espace vectoriel, $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_k$ des vecteurs linéairement indépendants et $\ell_{k+1} \in \mathfrak{L}$.*

Les vecteurs $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_k, \ell_{k+1}$ sont linéairement indépendants si et seulement si ℓ_{k+1} ne peut pas s'écrire comme combinaison linéaire de $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_k$.

Preuve. Si $\ell_1, \ldots, \ell_k, \ell_{k+1}$ sont linéairement indépendants, d'après la Proposition 1.33, ℓ_{k+1} ne peut pas s'écrire comme combinaison linéaire de $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_k$.

Supposons maintenant, que $\ell_1, \ldots, \ell_k, \ell_{k+1}$ sont des vecteurs linéairement dépendants. Donc

$$\beta_1\ell_1 + \cdots \beta_k\ell_k + \beta_{k+1}\ell_{k+1} = \vec{0}$$

pour certains scalaires $(\beta_1, \ldots, \beta_k, \beta_{k+1}) \neq (0, \ldots, 0, 0)$.

— Si $\beta_{k+1} = 0$, alors $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k) \neq (0, 0, \ldots, 0)$ et $\beta_1\ell_1 + \beta_2\ell_2 + \cdots + \beta_k\ell_k = \vec{0}$, ce qui contredit le fait que $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_k$, sont linéairement indépendants.

— Si $\beta_{k+1} \neq 0$, alors ℓ_{k+1} peut s'écrire comme

$$\ell_{k+1} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i\ell_i \quad \text{avec } \alpha_i = -\frac{\beta_i}{\beta_{k+1}}.$$

■

Théorème 1.49 (de la base incomplète) *Soit $\mathfrak{L}$ un espace vectoriel de dimension n et $e_1, e_2, \ldots, e_k$ des vecteurs linéairement indépendants de $\mathfrak{L}$.*

Alors il existent $n-k$ vecteurs $e_{k+1}, e_{k+2}, \ldots, e_n \in \mathfrak{L}$ tels que

$$(e_1, e_2, \ldots, e_k, e_{k+1}, e_{k+2}, \ldots, e_n)$$

est une base de $\mathfrak{L}$.

Preuve. Considérons $\mathfrak{M} = \text{span}\{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$ le sous-espace engendré par les k vecteurs $e_1, e_2, \ldots, e_k$.

Si $\mathfrak{M} = \mathfrak{L}$, alors $k = n$ et $(e_1, e_2, \ldots, e_k)$ est une base de $\mathfrak{L}$ par le Théorème 1.42.

Si $\mathfrak{M} \subsetneq \mathfrak{L}$, alors il existe un vecteur $e_{k+1} \in \mathfrak{L} \setminus \mathfrak{M}$.

Comme e_{k+1} ne peut pas s'écrire comme combinaison linéaire de $e_1, e_2, \ldots, e_k$, d'après le Lemme 1.48 la famille de vecteurs $\{e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}\}$ est linéairement indépendante.

D'après le Théorème 1.42 on peut continuer à ajouter de telle façon à $\{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$ exactement $k-n$ vecteurs linéairement indépendants, et le n-uplet que l'on obtient sera une base de $\mathfrak{L}$. ■

Exemple 1.50 Considérons le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^3$ de dimension 3.

Les vecteurs $u_1 = (i, 0, 0)$ et $u_2 = (0, 0, \sqrt{3})$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{C}^3$. On a

$$\mathfrak{M} = \text{span}\{u_1, u_2\} = \{(a, 0, b) \mid a, b \in \mathbb{C}\}.$$

Considérons le vecteur $(0, 1, 0) \in \mathbb{C}^3 \setminus \mathfrak{M}$.

Le triplet (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{C}^3$.

1.4.3 Sous-espaces en dimension finie

Une conséquence du Théorème de la base incomplète est le résultat suivant.

Proposition 1.51 *Soit $\mathfrak{L}$ un espace vectoriel de dimension finie et $\mathfrak{M}$ un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{L}$.*

Alors $\dim(\mathfrak{M}) \leq \dim(\mathfrak{L})$ *avec égalité si et seulement si* $\mathfrak{M} = \mathfrak{L}$.

De plus, si $\dim(\mathfrak{M}) > 0$ *alors il existe une base de $\mathfrak{L}$ dont les premiers* $\dim(\mathfrak{M})$ *vecteurs appartiennent à $\mathfrak{M}$.*

Preuve. Posons $k = \dim(\mathfrak{M})$ et $n = \dim(\mathfrak{L})$.

— Si $k = 0$ alors $\mathfrak{M} = \{\vec{0}\}$ et l'énoncé est trivialement vrai.

— Si $k > 0$, soit $(e_1, e_2, \ldots, e_k)$ une base de $\mathfrak{M}$. En particulier, les vecteurs $e_1, e_2, \ldots, e_k$ sont linéairement indépendants. D'après le Théorème 1.49 il existent $n-k$ vecteurs $e_{k+1}, e_{k+1}, \ldots, e_n$ tels que $(e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n)$ est une base de $\mathfrak{L}$.

  Donc $k \leq n$ est on a l'égalité seulement si les deux bases, et donc les deux espaces $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{L}$, coïncident.

■

Proposition 1.52 (Formule de Grassmann) *Soient $\mathfrak{L}$ un espace vectoriel et $\mathfrak{M}, \mathfrak{N} \subset \mathfrak{L}$ deux ses sous-espaces vectoriels. Alors*

$$\dim(\mathfrak{M} + \mathfrak{N}) = \dim(\mathfrak{M}) + \dim(\mathfrak{N}) - \dim(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N})$$

Preuve. D'après la Proposition 1.22, $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{L}$.

Posons $m = \dim(\mathfrak{M})$, $n = \dim(\mathfrak{N})$ et $p = \dim(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N})$.

Considérons $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ une base de $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}$.

D'après le Théorème 1.49 on peut compléter $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ en une base $(e_1, \ldots, e_p, e'_{p+1}, \ldots, e'_m)$ de l'espace vectoriel $\mathfrak{M}$.

Symétriquement, on peut construire une base $(e_1, \ldots, e_p, e''_{p+1}, \ldots, e''_n)$ de l'espace vectoriel $\mathfrak{N}$.

On va montrer que le $(m + n - p)$-uplet

$$(e_1, e_2, \ldots, e_p, e'_{p+1}, \ldots, e'_m, e''_{p+1}, \ldots, e''_n)$$

est une base de $\mathfrak{M} + \mathfrak{N}$.

Les $m + n - p$ vecteurs ci-dessous engendrent $\mathfrak{M} + \mathfrak{N}$. En effet, pour tout $\ell \in \mathfrak{M} + \mathfrak{N}$ il existe $m \in \mathfrak{M}$ et $n \in \mathfrak{N}$ tels que $\ell = m + n$. Donc, ils existes des scalaires $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ et $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ tels que

$$\begin{aligned} \ell = m + n &= \sum_{i=1}^{p} \alpha_i e_i + \sum_{i=1}^{m-p} \alpha_{p+i} e'_{p+i} \; + \; \sum_{i=1}^{p} \beta_i e_i + \sum_{i=1}^{n-p} \beta_{p+i} e''_{p+i} \\ &= \sum_{i=1}^{p} (\alpha_i + \beta_i) e_i + \sum_{i=1}^{m-p} \alpha_{p+1} e'_{p+1} + \sum_{i=1}^{n-p} \beta_{p+i} e''_{p+i} \end{aligned}$$

C'est-à-dire que $\mathfrak{L} = \operatorname{span}\left\{e_1, \ldots, e_p, e'_{p+1}, \ldots, e'_m, e''_{p+1}, \ldots, e''_n\right\}$.

De plus, les vecteurs $e_1, \ldots, e_p e'_{p+1}, \ldots, e'_m, e''_{p+1}, \ldots, e''_n$ sont linéairement indépendants. En effet, si

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i e_i + \sum_{i=1}^{m-p} \beta_i e'_{p+i} + \sum_{i=1}^{n-p} \gamma_i e''_{p+i} = \vec{0}$$

pour certains scalaires $\alpha_i, \beta_j, \gamma_k \in \mathbb{K}$, alors on a l'égalité

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i e_i + \sum_{i=1}^{m-p} \beta_i e'_{p+i} = -\sum_{i=1}^{n-p} \gamma_i e''_{p+i}.$$

Ce vecteur appartient à $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}$ et donc il peut s'écrire comme combinaison linéaire de $e_1, e_2, \ldots, e_p$. C'est-à-dire qu'ils existent $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_p \in \mathbb{K}$ tels que le vecteur de $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$ peut s'écrire comme

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i e_i + \sum_{i=1}^{m-p} \beta_i e'_{p+i} = \sum_{i=1}^{p} \delta_i e_i + \sum_{i=1}^{m-p} 0 e'_{p+i}.$$

Comme $(e_1, \ldots, e_p, e'_{p+1}, \ldots e'_m)$ est une base de $\mathfrak{M}$, cela implique que $\beta_i = 0$ pour tout $i = p+1, p+2, \ldots, m$.

Symétriquement on peut montrer que $\gamma_i = 0$ pour tout $i = p+1, p+2, \ldots, n$.

Enfin, comme $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ est une base de $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}$, l'égalité

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i e_i = \vec{0}$$

est vérifié seulement si $\alpha_i = 0$ pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$.

Donc, les vecteurs $e_1, \ldots, e_p, e'_{p+1}, \ldots, e_m, e''_{p+1}, \ldots, e_n$ sont linéairement indépendants.

D'après le Théorème 1.40, le $(m+n-p)$-uplet

$$(e_1, \ldots, e_p, e'_{p+1}, \ldots, e_m, e''_{p+1}, \ldots, e_n)$$

est une base de $\mathfrak{M} + \mathfrak{N}$. ■

Exemple 1.53 Soit $\mathbb{K}$ un corps quelconque. Considérons les deux sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{K})$

$$\mathfrak{M} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{K} \right\} \quad \text{et} \quad \mathfrak{N} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & 0 \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{K} \right\}.$$

C'est facile a voir que $\dim(\mathfrak{M}) = \dim(\mathfrak{N}) = 2$ et que l'intersection

$$\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{K} \right\}$$

a dimension 1. Donc le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{K})$

$$\mathfrak{M} + \mathfrak{N} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & 0 \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K} \right\}$$

a dimension

$$\dim(\mathfrak{M} + \mathfrak{N}) = 2 + 2 - 1 = 3.$$

Corollaire 1.54 *Soient $\mathfrak{L}$ un espace vectoriel et $\mathfrak{M}, \mathfrak{N} \subset \mathfrak{L}$ deux sous-espaces vectoriels supplémentaires. Alors,*

$$\dim(\mathfrak{L}) = \dim(\mathfrak{M}) + \dim(\mathfrak{N}).$$

De plus, si $(e_1, e_2, \ldots, e_m)$ est une base de $\mathfrak{M}$ et $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ est une base de $\mathfrak{N}$, alors le $(m+n)$-uplet $(e_1, e_2, \ldots, e_m, f_1, f_2, \ldots, f_m)$ est une base de $\mathfrak{L}$.

Preuve. Le résultat suit immédiatement de la formule de Grassman, car

$$\dim(\mathfrak{L}) = \dim(\mathfrak{M} \oplus \mathfrak{N}) = \dim(\mathfrak{M}) + \dim(\mathfrak{N}) + 0.$$

∎

En combinant le corollaire précédent et la Proposition 1.51 on obtient le résultat suivant.

Proposition 1.55 *Soit $\mathfrak{L}$ un espace vectoriel de dimension finie.*

Alors tout sous-espace vectoriel de $\mathfrak{L}$ a un supplémentaire.

Preuve. Soit $\mathfrak{M}$ un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{L}$.

Comme les deux sous-espaces vectoriels triviaux $\{\vec{0}\}$ et $\mathfrak{L}$ sont supplémentaires, le résultat est immédiat si $\mathfrak{M} = \{\vec{0}\}$ ou $\mathfrak{M} = \mathfrak{L}$.

Supposons que $\mathfrak{M}$ est un sous-espace vectoriel *propre* de $\mathfrak{L}$, c'est-à-dire différent de $\{\vec{0}\}$ et de $\mathfrak{L}$.

Posons $n = \dim(\mathfrak{L})$ et $m = \dim(\mathfrak{M})$.

Considérons une base $(e_1, e_2, \ldots, e_m)$ de $\mathfrak{M}$. D'après la Proposition 1.51 on peut compléter cette base en une base $(e_1, e_2, \ldots, e_m, e_{m+1}, \ldots, e_n)$ de $\mathfrak{L}$.

Soit $\mathfrak{N} = \operatorname{span}\{e_{m+1}, e_{m+2}, \ldots, e_n\}$. On peut vérifier facilement que $\mathfrak{N}$ est un supplémentaire de $\mathfrak{M}$.

De plus, puisque les vecteurs $e_{m+1}, e_{m+2}, \ldots, e_n$ sont linéairement indépendants, $(e_{m+1}, e_{m+2}, \ldots, e_n)$ est une base de $\mathfrak{N}$. Donc $\dim(\mathfrak{N}) = n - m$. ∎

Exemple 1.56 Considérons l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{K})$ de dimension 4 sur un corps $\mathbb{K}$ et son sous-espace

$$\mathfrak{M} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta, \in \mathbb{K} \right\}.$$

On a vu dans l'Exemple 1.53 que $\dim(\mathfrak{M}) = 2$.

Le doublet $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathfrak{M}$.

On peut compléter cette doublet en une base de $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{K})$ en ajoutant les vecteurs $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (voir aussi l'Example 1.37).

L'espace

$$\mathfrak{N} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{K} \right\}$$

est un sous-espace de $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{K})$ supplémentaire à $\mathfrak{M}$.

1.5 Changement de base et bases infinies

L'étude des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels $\mathbb{K}^n$ est très important, car tout espace vectoriel de dimension fini est isomorphe à $\mathbb{K}^n$ pour un certain entier $n \geq 0$. En effet, on a le résultat suivant.

Proposition 1.57 *Soit $\mathfrak{L}$ un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension n. Alors $\mathfrak{L}$ est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.*

Preuve. Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de $\mathfrak{L}$.

Considérons la fonction

$$\begin{array}{rccc} \phi: & \mathfrak{L} & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ & \ell & \mapsto & (\alpha_1, \alpha_2 \ldots, \alpha_n) \end{array}$$

où $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ sont les coordonnées de ℓ relatives à la base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$.

La fonction ϕ est un isomorphisme entre les deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels $\mathfrak{L}$ et $\mathbb{K}^n$. En effet,

- ϕ est bijective, car
  - si $\phi(\ell) = \phi(m) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ alors
  $$\ell = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n = m$$
  donc ϕ est injective ;
  - tout n-uplet $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ est image par ϕ du vecteur
  $$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n$$
  donc ϕ est surjective.
- pour tout $\ell, m \in \mathfrak{L}$, $\quad \phi(\ell + m) = \phi(\ell) + \phi(m)$, car
$$\begin{array}{rcl} \phi(\ell + m) & = & \phi((\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n) \ + \ (\beta_1 e_1 + \cdots + \beta_n e_n)) \\ & = & \phi((\alpha_1 + \beta_1) e_1 + \cdots + (\alpha_n + \beta_n) e_n) \\ & = & (\alpha_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_n + \beta_n) \\ & = & (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) + (\beta_1, \ldots, \beta_n)) \\ & = & \phi(\ell) + \phi(m) \end{array}$$
avec $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ et $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ les coordonnés respectivement de ℓ et m dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$.
- pour tout $\gamma \in \mathbb{K}$ et tout $\ell \in \mathfrak{L}$, $\quad \phi(a\ell) = a\phi(\ell)$, car
$$\begin{array}{rcl} \phi(\gamma \ell) & = & \phi(\gamma \cdot (\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n)) \\ & = & \phi((\gamma\alpha_1) e_1 + \cdots + (\gamma\alpha_n) e_n) \\ & = & (\gamma\alpha_1, \ldots, \gamma\alpha_n) \\ & = & \gamma(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \\ & = & \gamma\phi(\ell) \end{array}$$
avec $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ les coordonnés de ℓ dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$.

∎

1.5.1 Matrice de passage

Comme $\mathbb{K}^n \simeq \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, la Proposition 1.57 nous dit que, étant donné une base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ d'un espace vectoriel $\mathfrak{L}$, on peut associer à chaque vecteur de $\mathfrak{L}$ un et un seul vecteur colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$:

$$x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots x_ne_n \quad \longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Cette correspondance, ainsi que l'isomorphisme de la Proposition 1.57, n'est pas unique, mais dépend du choix de la base.

En effet, considérons deux bases $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ et $(e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathfrak{L}$. Un vecteur $\ell \in \mathfrak{L}$ pourra s'écrire comme

$$\ell \;=\; x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n \;=\; y_1e'_1 + y_2e'_2 + \cdots + y_ne'_n$$

pour certains scalaires x_i et y_i. On se demande quelle est la relation entre les deux vecteurs colonnes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Comme $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base, chacun des vecteurs e'_i peut s'exprimer comme combinaison linéaire de $e_1, e_2, \ldots, e_n$, c'est-à-dire que l'on a

$$\begin{cases} e'_1 &= & p_{11}e_1 + p_{21}e_2 + \cdots + p_{n1}e_n \\ e'_2 &= & p_{12}e_1 + p_{22}e_2 + \cdots + p_{n2}e_n \\ \vdots & & \vdots \\ e'_n &= & p_{1n}e_1 + p_{2n}e_2 + \cdots + p_{nn}e_n \end{cases} \tag{1.4}$$

Si on considère les bases $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ et $(e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$ comme vecteurs colonnes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathfrak{L}) \simeq \mathfrak{L}^n$, on peut récrire ce système comme

$$\begin{pmatrix} e'_1 \\ e'_2 \\ \vdots \\ e'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}.$$

La matrice

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

est appelé la *matrice de passage* (ou *matrice de changement de base*) de la base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ à la base $(e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$.

Exemple 1.58 Considérons le $\mathbb{K}$-espace vectoriels $\mathfrak{L} = \mathbb{K}^2$.

D'après l'Exemple 1.35 on sait que $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est une base de $\mathfrak{L}$. Il est facile à montrer que le couple de vecteurs $(d_1, d_2) \in \mathfrak{L}^2$ avec

$$d_1 = (1, 1) \quad \text{et} \quad d_2 = (1, -1).$$

est aussi une base de $\mathfrak{L}$.

La matrice de passage de $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ à (d_1, d_2) est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Les matrices de passage ont une forme intéressante : elles sont inversibles.

En effet, on a le résultat suivant que l'on peut démontrer avec une technique similaire à celle de la preuve du Théorème 1.42.

Proposition 1.59 *Soit $\mathfrak{L}$ un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ et $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de $\mathfrak{L}$.*

Soit $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ un n-uplet de vecteurs de $\mathfrak{L}$ et P la matrice de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ dont les coefficients de la j-ème colonne sont les coordonnées du vecteurs d_j dans la base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$.

Alors, $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ est une base de $\mathfrak{L}$ si et seulement si P est inversible.

Preuve. D'après le Théorème 1.42 on sait que chaque base de $\mathfrak{L}$ a exactement n vecteurs. Donc montrer que un n-uplet est une base corresponde a montrer que ses n vecteurs sont linéairement indépendants.

Considérons un vecteur $\ell \in \mathfrak{L}$ de la forme

$$\ell = x_1 d_1 + x_2 d_2 + \cdots + x_n d_n$$

pour certains scalaires $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$.

Puisque $\ell = \vec{0}$ si et seulement si ses coordonnées dans la base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ sont nulles on a, d'après l'Équation (1.4), l'équivalence

$$x_1 d_1 + x_2 d_2 + \cdots x_n d_n = \vec{0} \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{lcl} p_{11}x_1 + p_{12}x_2 + \cdots + p_{1n}x_n & = & 0 \\ p_{21}x_1 + p_{22}x_2 + \cdots + p_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ p_{n1}x_1 + p_{n2}x_2 + \cdots + p_{nn}x_n & = & 0 \end{array} \right.$$

avec p_{ij} le coefficient de la matrice P dans la i-ème ligne et j-ème colonne.

Or, ce système d'équations linéaires a pour seule solution $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ si et seulement si la matrice associée $P = (p_{ij})_{ij}$ est inversible.

Donc les vecteurs $d_1, d_2, \ldots, d_n$ sont linéairement indépendants si et seulement si la matrice P est inversible. ∎

1.5.2 Bases infinies

Soient $\mathfrak{L}$ un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$.

Une suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}} = (e_1, e_2, e_3, \ldots)$ est une *base* de $\mathfrak{L}$ si chaque élément $\ell \in \mathfrak{L}$ s'exprime de façon unique comme combinaison linéaire finie des éléments de $\{e_1, e_2, e_3, \ldots\}$, c'est-à-dire qu'il existe des uniques $e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_k}$ t.q.

$$\ell = x_1 e_{i_1} + x_2 e_{i_2} + \cdots x_k e_{i_k}$$

pour certains $x_1, x_2, \ldots, x_k \in \mathbb{K}$.

Exemple 1.60 Soit $\mathbb{K}$ un corps. On définit

$$\mathbb{K}^{\mathbb{N}} = \{(a_0, a_1, a_2, \ldots) \mid a_i \in \mathbb{K}\}$$

L'ensemble des *suites numériques* dans le corps $\mathbb{K}$. Cet ensemble est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel si on le munit des opérations

— $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} + (y_n)_{n\in\mathbb{N}} := (x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$;

— $\alpha(x_n)_{n\in\mathbb{N}} := (\alpha x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

L'espace $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ a dimension infinie et une base pour cet espace est donnée par la suite $(E_1, E_2, E_3, \ldots)$ où

$$E_i = (0, \ldots, 0, \underset{i}{1}, 0, \ldots) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$$

Exemple 1.61 Soit $\mathbb{K}$ un corps. On définit

$$\mathbb{K}[x] = \{P = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \mid n \geq 0 \text{ et } a_i \in \mathbb{K}\}$$

l'ensemble des *polynômes* en une seule variable x et à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Cet ensemble est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel quand muni des opérations usuelles d'addition et de multiplication par scalaire, c'est-à-dire :

— Pour tout $P = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ et $Q = b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m$, avec $m \geq n$

$$P + Q := (a_0 + b_0) + \cdots + (a_n + b_n)x^n + b_{n+1}x^{n+1} + \cdots + b_m x^m.$$

— Pour tout $P = a_0 + a_1 x + \cdots a_n x^n$ et $\alpha \in \mathbb{K}$

$$\alpha P := (\alpha a_0) + (\alpha a_1)x + \cdots + (\alpha a_n)x^n$$

La suite $(1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots)$ est une base de $\mathbb{K}[x]$. En effet, tout polynôme $P \in \mathbb{K}[x]$ peut s'écrire comme

$$P = p_0 + p_1 x + \cdots + p_k x^k$$

où $k = \deg(P)$.

De la même façon, pour tout ensemble fini ou infini (dénombrable) Λ on peut généraliser les notions suivants :

— span $\{\Lambda\} = \{$toute combinaison linéaire finie des éléments de $\Lambda\}$;
— Λ est un ensemble linéairement indépendant si

$$\sum_{i=1}^{k} x_i e_i = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad x_i = 0 \text{ pour tout } 1 \leq i \leq k,$$

où $\{e_1, e_2, \ldots, e_k\} \subset \Lambda$;
— Λ est une base de $\mathfrak{L}$ si et seulement si

(1) span $\{\Lambda\} = \mathfrak{L}$

(2) Λ est linéairement indépendante.

Remarquez qu'il est possible généraliser cette définition à des ensembles infinis *non dénombrables* (mais cela n'est pas le but de ce cours).

On a le résultat suivant (la preuve utilise la récurrence transfinie et l'axiome du choix, ou équivalemment le Lemme de Zorn).

Théorème 1.62 *Soit $\mathfrak{L}$ un espace vectoriel. Alors une des trois affirmations suivantes est vraie :*

(1) $\mathfrak{L} = \{\vec{0}\}$ et $\dim(\mathfrak{L}) = 0$;

(2) $\mathfrak{L}$ possède une base finie ;

(3) $\mathfrak{L}$ possède une base infinie.

1.5.3 Base de l'espace fonctionnel

Un autre exemple intéressant est donné par l'espace fonctionnel défini dans la Section 1.1.3. Avant de donner l'exemple, on définit la fonction delta.

Considérons un ensemble S (fini ou infini) et $s \in S$ un élément de l'ensemble.

La fonction $\delta_s \in \mathcal{F}(S)$, appelée *fonction delta* (ou *delta de Dirac*), est définie par

$$\delta_s(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } s = t \\ 0 & \text{si } t \neq s \end{cases} \tag{1.5}$$

Quand $S = \{1, 2, \ldots, n\}$, on dénote par $\delta_{ij} := \delta_i(j)$, c'est-à-dire :

$$\delta_i(j) = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases} \tag{1.6}$$

et on appelle cette fonction le *symbole de Kroneker* (ou *delta de Kroneker*).

Les fonctions delta nous permettent de trouver une base de l'espace vectoriel $\mathcal{F}(S)$.

Rappelons que tout ensemble fini à n élément peut être vu comme l'ensemble des n premières entiers positifs $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Proposition 1.63 *Soit S est un ensemble.*

i) Si $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ alors, le n-uplet $(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$ est une base finie de $\mathcal{F}(S)$.

ii) Si S est infini, alors $(\delta_s)_{s\in S}$ est une base infinie de $\mathcal{F}(S)$.

Preuve. Il suffit de montrer que tout $f \in \mathcal{F}(S)$ s'écrit de façon unique comme

$$f = \sum_{s\in S} f(s)\delta_s, \tag{1.7}$$

où la somme est finie (si S est fini) ou infinie à support fini [4] (si S est infini).

En effet, pour tout $t \in S$ on a

i) si S est fini,

$$\begin{aligned}\left(\sum_{s\in S} f(s)\delta_s\right)(t) &= \sum_{s\in S} f(s)\delta_t(s)\\ &= 0+\cdots+0+f(t)+0+\cdots+0\\ &= f(t)\end{aligned}$$

ii) si S est infini,

$$\begin{aligned}\left(\sum_{s\in S} f(s)\delta_s\right)(t) &= \sum_{s\in S} f(s)\delta_t(s)\\ &= 0+\cdots+0+f(t)+0+0+\cdots\\ &= f(t)\end{aligned}$$

Dans les deux cas, la décomposition est unique. En effet si

$$\sum_{s\in S} a_s\delta_s = \sum_{s\in S} b_s\delta_s$$

alors pour tout $t \in S$

$$a_t = \left(\sum_{s\in S} a_s\delta_s\right)(t) = \left(\sum_{s\in S} b_s\delta_s\right)(t) = b_t.$$

Donc $a_t = b_t$ pour tout $t \in S$. ∎

La proposition précédente nous dit en particulier que, quand S est fini, on peut expliciter l'isomorphisme entre $\mathcal{F}(S)$ et $\mathbb{K}^n$ vu dans la Section 1.1.4.

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{F}(S) & \cong & \mathbb{K}^n\\ \delta_i & \longleftrightarrow & (0,\ldots,0,\underset{i}{1},0,\ldots,0)\end{array}$$

4. Un somme infinie est dite *à support fini* si seulement un nombre fini de ses termes sont non nuls.

Chapitre 2

Applications linéaires

2.1 Applications linéaires et formes linéaires

2.1.1 Définition

Soient $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{M}$ deux espaces vectoriels sur un corps $\mathbb{K}$.

Une application $f : \mathfrak{L} \to \mathfrak{M}$ est dite *linéaire* si pour tous vecteurs $\ell, m \in \mathfrak{L}$ et tous scalaires $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ on a

$$f(\alpha\ell + \beta m) = \alpha f(\ell) + \beta f(m)$$

ou, équivalemment,

$$f(\ell + m) = f(\ell) + f(m) \quad \text{et} \quad f(\alpha\ell) = \alpha f(\ell).$$

Remarquez que les opérations de $\mathfrak{L}$ et de $\mathfrak{M}$ sont en général différentes. Donc, à la rigueur on devrait écrire

$$f(\alpha \cdot_{\mathfrak{L}} \ell +_{\mathfrak{L}} \beta \cdot_{\mathfrak{L}} m) = \alpha \cdot_{\mathfrak{M}} f(\ell) +_{\mathfrak{M}} \beta \cdot_{\mathfrak{M}} f(m)$$

où $+_{\mathfrak{L}}, \cdot_{\mathfrak{L}}$ sont les deux opérations de $\mathfrak{L}$ et $+_{\mathfrak{M}}, \cdot_{\mathfrak{M}}$ les deux opérations de $\mathfrak{M}$. Pour ne pas alourdir la notation, on utilisera le même symbole sur les deux espaces.

Exemple 2.1 Tout isomorphisme $\phi : \mathfrak{L} \to \mathfrak{M}$ entre deux espaces vectoriels $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{M}$ est une application linéaire.

Exemple 2.2 La fonction $f_0 : \mathfrak{L} \to \mathfrak{M}$ définie par $f_0(\ell) = \vec{0}_{\mathfrak{M}}$ pour tout $\ell \in \mathfrak{L}$ est une application linéaire.

La proposition suivante montre certaines conséquences immédiates de la définition d'application linéaire.

Proposition 2.3 *Soit $f : \mathfrak{L} \to \mathfrak{M}$ une application linéaire entre les $\mathbb{K}$-espaces vectoriels $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{M}$. Alors*

(1) $f\left(\vec{0}_{\mathfrak{L}}\right) = \vec{0}_{\mathfrak{M}}$ *;*

(2) Pour tout vecteur $\ell \in \mathfrak{L}$ *on a* $f(-\ell) = -f(\ell)$*.*

(3) Pour tous $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ *et tous* $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n \in \mathfrak{L}$ *on a*

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i \ell_i)\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(\ell_i);$$

Preuve.

(1) Pour tout $\ell \in \mathfrak{L}$ on a $0 \cdot \ell = \vec{0}_{\mathfrak{L}}$, et également pour tout $m \in \mathfrak{M}$ on a $0 \cdot m = \vec{0}_{\mathfrak{M}}$. Donc

$$f\left(\vec{0}_{\mathfrak{L}}\right) = f(0 \cdot \ell) = 0 \cdot f(\ell) = \vec{0}_{\mathfrak{M}}.$$

(2) Pour tout $\ell \in \mathfrak{L}$ on a

$$f(-\ell) = f((-1) \cdot \ell) = (-1) \cdot f(\ell) = -f(\ell).$$

(3) Par récurrence sur n. (`Exercice`)

■

Quand il n'y a pas d'ambiguïté on utilisera le symbole $\vec{0}$ pour décrire à la fois le vecteur nul $\vec{0}_{\mathfrak{L}} \in \mathfrak{L}$ et pour le vecteur nul $\vec{0}_{\mathfrak{M}} \in \mathfrak{M}$.

Exemple 2.4 Considérons les deux $\mathbb{R}$-espace vectoriels $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{C}$ La fonction

$$\begin{aligned} f : \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{C} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &\mapsto a + id \end{aligned}$$

est une application linéaire (`Exercice`). L'image de la matrice nulle est

$$f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 0 + i0 = 0.$$

Exemple 2.5 Soit $\mathfrak{L}$ un $\mathbb{K}$ espace vectoriel et $\ell \in \mathfrak{L}$ un vecteur fixé. La fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{K} &\rightarrow \mathfrak{L} \\ \alpha &\mapsto \alpha\ell \end{aligned}$$

est une application linéaire. En effet, pour tout $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$

— $f(\alpha + \beta) = (\alpha + \beta)\ell = \alpha\ell + \beta\ell = f(\alpha) + f(\beta)$,

— $f(\gamma\alpha) = (\gamma\alpha)\ell = \gamma(\alpha\ell) = \gamma f(\alpha)$.

Remarquez que si la fonction $f : \mathbb{K} \rightarrow \mathfrak{L}$, avec $\mathfrak{L}$ un $\mathbb{K}$-espace linéaire, est une application linéaire, alors il existe un vecteur $\ell \in \mathfrak{L}$ telle que f peut s'exprimer dans la forme vue dans l'Exemple 2.5. En effet, il suffit de poser $\ell = f(1)$.

2.1.2 Composition, somme et multiplication par scalaire

Soient $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Considérons deux fonctions $f : \mathfrak{L} \to \mathfrak{M}$ et $g : \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$. La fonction $g \circ f : \mathfrak{L} \to \mathfrak{N}$ est appelée *composée* des fonctions f et g.

Proposition 2.6 *Une composée d'applications linéaires est une application linéaire.*

Preuve. Soient $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f : \mathfrak{L} \to \mathfrak{M}$ et $g : \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$ deux applications linéaires. La fonction $g \circ f$, définie par $(g \circ f)(\ell) = g(f(\ell))$ pour tout $\ell \in \mathfrak{L}$, est une application linéaire. En effet, pour tous $\ell, m \in \mathfrak{L}$ et pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ on a

$$\begin{aligned} (g \circ f)(\alpha\ell + \beta m) &= g\left(f(\alpha\ell + \beta m)\right) \\ &= g\left(\alpha f(\ell) + \beta f(m)\right) \\ &= \alpha g(f(\ell)) + \beta g(f(\ell)) \\ &= \alpha(g \circ f)(\ell) + \beta(g \circ f)(m). \end{aligned}$$

∎

Exemple 2.7 Considérons les deux applications linéaires

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \\ x &\mapsto \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 2x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} g : \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) &\to \mathbb{C} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &\mapsto a + id \end{aligned}$$

avec $\mathbb{R}, \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{C}$ espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ (voir Exemples 2.4 et 2.5). La fonction

$$\begin{aligned} g \circ f : \mathbb{R} &\to \mathbb{C} \\ x &\mapsto x + 2ix \end{aligned}$$

est une application linéaire (`Exercice`).

En plus de la composition, on peut obtenir des applications linéaires à partir d'application linéaire connues en définissant, pour toutes applications linéaires $f, g : \mathfrak{L} \to \mathfrak{M}$ et pour tout scalaire $\gamma \in \mathbb{K}$ les fonctions

$$\begin{aligned} f + g : \mathfrak{L} &\to \mathfrak{M} \\ \ell &\mapsto f(\ell) + g(\ell) \end{aligned}$$

et

$$\begin{array}{rcl}\gamma f : \mathfrak{L} & \to & \mathfrak{M} \\ \ell & \mapsto & \gamma f(\ell)\end{array}$$

Proposition 2.8 *Soient $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}$ des $\mathbb{K}$ espaces vectoriels, $f, g : \mathfrak{L} \to \mathfrak{M}$ des applications linéaires et $\gamma \in \mathbb{K}$ un scalaire. Alors, les fonctions $f + g$ et αf sont des applications linéaires.*

Preuve. Considérons deux vecteurs $\ell, m \in \mathfrak{L}$ et deux scalaires $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Alors

$$\begin{array}{rcl}(f+g)(\alpha\ell + \beta m) & = & f(\alpha\ell + \beta m) + g(\alpha\ell + \beta m) \\ & = & \alpha f(\ell) + \beta f(m) \ + \ \alpha g(\ell) + \beta g(m) \\ & = & \alpha(f+g)(\ell) + \beta(f+g)(m)\end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl}(\gamma f)(\alpha\ell + \beta m) & = & \gamma(\alpha f(\ell) + \beta f(m)) \\ & = & \alpha(\gamma f)(\ell) + \beta(\gamma f)(m).\end{array}$$

Donc les deux fonctions $f + g$ et γf sont des applications linéaires de $\mathfrak{L}$ à $\mathfrak{M}$.

■

Exemple 2.9 Soient f, g deux applications de $\mathbb{C}^2$ à $\mathbb{C}$ définies par $f\big((x,y)\big) = x$ et $g\big((x,y)\big) = y$. La fonction

$$\begin{array}{rcl}f + g : \mathbb{C}^2 & \to & \mathbb{C} \\ (x,y) & \mapsto & x + y\end{array}$$

est une application linéaire.

Exemple 2.10 Soit $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ comme dans l'exemple précédent et $3i \in \mathbb{C}$. La fonction

$$\begin{array}{rcl}3if : \mathbb{C}^2 & \to & \mathbb{C} \\ (x,y) & \mapsto & 3ix\end{array}$$

est une application linéaire.

Étant donnée deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{M}$ n note par $\mathcal{L}(\mathfrak{L}, \mathfrak{M})$ l'ensemble des applications linéaires de $\mathfrak{L}$ à $\mathfrak{M}$, c'est-à-dire.

$$\mathcal{L}(\mathfrak{L}, \mathfrak{M}) = \{f : \mathfrak{L} \to \mathfrak{M} \mid f \text{ est linéaire}\}.$$

Comme conséquence immédiate de la Proposition 2.8 on a le résultat suivant.

Corollaire 2.11 *Soient $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Alors $\mathcal{L}(\mathfrak{L}, \mathfrak{M})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.*

2.1.3 Formes linéaires

Considérons un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathfrak{L}$. Une fonction linéaire $f : \mathfrak{L} \to \mathbb{K}$ est appelé *forme linéaire* sur $\mathfrak{L}$.

Exemple 2.12 Soit $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ la fonction définie par $f((x, y)) = x + y$. Cette fonction est une forme linéaire. En effet, pour tous vecteurs $(x, y), (z, t) \in \mathbb{C}^2$ et tout scalaire $\alpha \in \mathbb{C}$ on a

$$\begin{aligned} f\big((x,y) + (z,t)\big) &= f\big((x+z, y+t)\big) = (x+z) + (y+t) \\ &= (x+y) + (z+t) = f\big((x,y)\big) + f\big((z,t)\big) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f\big(\alpha(x,y)\big) &= f\big((\alpha x, \alpha y)\big) = \alpha x + \alpha y \\ &= \alpha(x+y) = \alpha f\big((x,y)\big). \end{aligned}$$

Étant donné un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathfrak{L}$, on appelle *espace dual* de $\mathfrak{L}$, et on le dénote par $\mathfrak{L}^*$, l'espace vectoriel

$$\mathfrak{L}^* := \mathcal{L}\left(\mathfrak{L}, \mathbb{K}\right) = \left\{ f : \mathfrak{L} \to \mathbb{K} \mid f \text{ forme linéaire} \right\}.$$

On reverra sur cet espace dans une des prochaines sections.

Soit $\mathfrak{L}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $n \geq 1$ et $f : \mathfrak{L} \to \mathbb{K}^n$ une application linéaire. L'image par f d'un vecteur $\ell \in \mathfrak{L}$ sera un n-uplet de la forme

$$f(\ell) = \big(f_1(\ell), f_2(\ell), \ldots, f_n(\ell)\big).$$

On appelle *composantes* de f les applications $f_i : \mathfrak{L} \to \mathbb{K}$ pour $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Proposition 2.13 *Une application $f : \mathfrak{L} \to \mathbb{K}^n$ est linéaire si et seulement si toutes ses composantes $f_1, f_2, \ldots, f_n$ sont des formes linéaires.*

Preuve. Soient $\ell, m \in \mathfrak{L}$ deux vecteurs et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ deux scalaires. D'après la définition des composantes et les règles de calcul das un espace vectoriel produit, on a

$$f(\alpha\ell + \beta m) = \big(f_1(\alpha\ell + \beta m), f_2(\alpha\ell + \beta m), \ldots, f_n(\alpha\ell + \beta m)\big)$$

et

$$\alpha f(\ell) + \beta f(m) = \big(\alpha f_1(\ell) + \beta f_1(m), \alpha f_2(\ell) + \beta f_2(m), \ldots, \alpha f_n(\ell) + \beta f_n(m)\big).$$

Donc on a

$$f(\alpha\ell + \beta m) = \alpha f(\ell) + \beta f(m) \quad \Longleftrightarrow \quad f_i(\alpha\ell + \beta m) = \alpha f_i(\ell) + \beta f_i(m) \quad \forall\, i$$

c'est-à-dire que f est une application linéaire si et seulement si toutes ses composantes sont des formes linéaires. ∎

2.1.4 Opérateurs linéaires

Une application linéaire d'un espace vectoriel $\mathfrak{L}$ en lui même est dite un *endomorphisme* ou *opérateur linéaire.*

Exemple 2.14 L'application $\mathrm{id}_{\mathfrak{L}} : \mathfrak{L} \to \mathfrak{L}$ définie par $\mathrm{id}_{\mathfrak{L}}(\ell) = \ell$ pour tout $\ell \in \mathfrak{L}$ est un opérateur linéaire appelé *opérateur identité* sur $\mathfrak{L}$.

Un endomorphisme bijectif est appelé un *automorphisme.* Un automorphisme est donc un isomorphisme d'un espace vectoriel $\mathfrak{L}$ en lui même.

Exemple 2.15 Considérons le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^2$. La fonction

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (y, x) \end{array}$$

est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$. En effet, f est clairement bijective et pour tous couples $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ et tous scalaires $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{array}{rcl} f\big(\alpha(x_1, y_1) + \beta(x_2, y_2)\big) & = & f\big((\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2)\big) \\ & = & (\alpha y_1 + \beta y_2, \alpha x_1 + \beta x_2) \\ & = & \alpha(y_1, x_1) + \beta(y_2, x_2) \\ & = & \alpha f\big((x_1, y_2)\big) + \beta\big((x_2, y_2)\big). \end{array}$$

Étant donné un espace vectoriel $\mathfrak{L}$ on dénote l'ensemble des endomorphismes de $\mathfrak{L}$ par

$$\mathrm{End}\,(\mathfrak{L}) = \{f : \mathfrak{L} \to \mathfrak{L} \mid f \text{ linéaire}\}$$

et l'ensemble des automorphismes de $\mathfrak{L}$ par

$$\mathrm{Aut}\,(\mathfrak{L}) = \{f : \mathfrak{L} \to \mathfrak{L} \mid f \text{ isomorphisme}\}\,.$$

Ce dernier est appelé aussi le *groupe général linéaire* de $\mathfrak{L}$ et est dénoté par $\mathrm{GL}\,(\mathfrak{L})$ (on reverra sur cela plus tard dans ce Chapitre).

Soit $\mathfrak{L}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\alpha \in \mathbb{K}$ un scalaire. L'application linéaire

$$\begin{array}{rcl} \alpha\,\mathrm{id}_{\mathfrak{L}} : \mathfrak{L} & \to & \mathfrak{L} \\ \ell & \mapsto & \alpha\ell \end{array}$$

est appelée l'*homothétie* de rapport α. Remarquons que toute homothétie de $\mathfrak{L}$ est un automorphisme de $\mathfrak{L}$.

Exemple 2.16 Considérons le $\mathbb{K}$ espace vectoriel $\mathcal{M}_{2,2}\,(\mathbb{K})$. L'endomorphisme

$$2\mathrm{id} : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{pmatrix}$$

est une homothétie de rapport 2.

2.1.5 Projections et symétries

Un endomorphisme $p \in \operatorname{End}(\mathfrak{L})$ est appelé un *idempotent* de $\mathfrak{L}$ (ou simplement *idempotent*) si $p \circ p = p$.

Exemple 2.17 L'endomorphisme f_0 est idempotent. En effet, pour tout $\ell \in \mathfrak{L}$ on a $(f_0 \circ f_0)(\ell) = f_0(\ell) = \vec{0}$.

Proposition 2.18 *Soit $\mathfrak{L}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Un endomorphisme p est idempotent si et seulement si $\mathrm{id}_{\mathfrak{L}} - p$ est idempotent de $\mathfrak{L}$.*

Preuve. Pour toute fonction $p \in \operatorname{End}(\mathfrak{L})$ on a

$$(\mathrm{id}_{\mathfrak{L}} - p)^2 = (\mathrm{id}_{\mathfrak{L}} - p) + (p \circ p - p).$$

Donc $(\mathrm{id}_{\mathfrak{L}} - p)^2 = \mathrm{id}_{\mathfrak{L}} - p$ si et seulement si $p \circ p = p$. ∎

Exemple 2.19 Soit $\mathfrak{L}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. L'endomorphisme $\mathrm{id}_{\mathfrak{L}}$ est clairement un idempotent.

De plus, remarquons que l'on a $\mathrm{id}_{\mathfrak{L}} = (\mathrm{id}_{\mathfrak{L}} - f_0)$.

Un endomorphisme $s \in \operatorname{End}(\mathfrak{L})$ est dit une *involution* de $\mathfrak{L}$ (ou un endomorphisme *involutif*) si $s \circ s = \mathrm{id}_{\mathfrak{L}}$.

Exemple 2.20 L'homothétie f_{-1} tel que $f_{-1}(\ell) = -\ell$ pour tout vecteur $\ell \in \mathfrak{L}$ est une involution. En effet, pour tout $\ell \in \mathfrak{L}$ on a $(f_{-1} \circ f_{-1})(\ell) = -(-\ell) = \ell$.

Proposition 2.21 *Soit $\mathfrak{L}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Un endomorphisme s est une symétrie si et seulement si $s = 2p - \mathrm{id}_{\mathfrak{L}}$ avec p un idempotent de $\mathfrak{L}$.*

Preuve. Posons $p = \frac{1}{2}(s + \mathrm{id}_{\mathfrak{L}})$. Alors

$$p \circ p = p \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{4}(s \circ s + 2s + \mathrm{id}_{\mathfrak{L}}) = \frac{1}{2}(s + \mathrm{id}_{\mathfrak{L}}) \quad \Leftrightarrow \quad s \circ s = \mathrm{id}_{\mathfrak{L}}.$$

Donc s est une symétrie si et seulement si p est un idempotent. ∎

Exemple 2.22 L'involution f_{-1} peut s'écrire comme $f_{-1} = 2f_0 - \mathrm{id}_{\mathfrak{L}}$.

Remarquons que l'identité sur $\mathfrak{L}$ est aussi une symétrie car $\mathrm{id}_{\mathfrak{L}} \circ \mathrm{id}_{\mathfrak{L}} = \mathrm{id}_{\mathfrak{L}}$. De plus, on a $\mathrm{id}_{\mathfrak{L}} = 2\mathrm{id}_{\mathfrak{L}} - \mathrm{id}_{\mathfrak{L}}$.

Considérons maintenant un espace vectoriel $\mathfrak{L}$ et deux de ses sous-espaces vectoriels supplémentaires $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$. Rappelons que, puisque $\mathfrak{L} = \mathfrak{M} \oplus \mathfrak{N}$, pour tout vecteur $\ell \in \mathfrak{L}$ ils existent des uniques $m_\ell \in \mathfrak{M}$ et $n_\ell \in \mathfrak{N}$ tels que $\ell = m_\ell + n_\ell$.

L'endomorphisme $\pi_{\mathfrak{M}}$ défini par

$$\begin{array}{rcl} \pi_{\mathfrak{M}} : \mathfrak{L} & \to & \mathfrak{L} \\ \ell & \mapsto & m_\ell \end{array}$$

est appelée la *projection sur $\mathfrak{M}$ parallèlement à $\mathfrak{N}$*.

Remarquons que $\pi_{\mathfrak{M}}(\ell) = \ell$ si et seulement si le vecteur ℓ appartient à $\mathfrak{M}$ et que $\pi_{\mathfrak{M}}(\ell) = \vec{0}$ si et seulement si $\ell \in \mathfrak{N}$.

De plus, toute projection π sur un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{L}$ est un idempotent de $\mathfrak{L}$, c'est-à-dire que $\pi \circ \pi = \pi$.

L'endomorphisme $\sigma_{\mathfrak{M}}$ défini par

$$\begin{array}{rcl} \sigma_{\mathfrak{M}} : \mathfrak{L} & \mapsto & \mathfrak{L} \\ \ell & \mapsto & m_\ell - n_\ell \end{array}$$

est appelée la *symétrie par rapport à $\mathfrak{M}$ parallèlement à $\mathfrak{N}$*.

Remarquons que $\sigma_{\mathfrak{M}}(\ell) = \ell$ si et seulement si le vecteur ℓ appartient à $\mathfrak{M}$ et que $\sigma_{\mathfrak{M}}(\ell) = -\ell$ si et seulement si $\ell \in \mathfrak{N}$.

De plus, toute symétrie σ par rapport à un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{L}$ est une involution, c'est-à-dire que $\sigma \circ \sigma = \mathrm{id}$.

En particulier, pour chaque vecteur $\ell \in \mathfrak{L}$ on a

$$\sigma_{\mathfrak{M}}(\ell) = m_\ell - n_\ell = 2m_\ell - (m_\ell + n_\ell) = \left(2\pi_{\mathfrak{M}} - \mathrm{id}_{\mathfrak{L}}\right)(\ell).$$

Donc on a l'égalité des endomorphismes $\sigma_{\mathfrak{M}} = 2\pi_{\mathfrak{M}} - \mathrm{id}_{\mathfrak{L}}$.

Exemple 2.23 Considérons le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{K})$ et ses deux sous-espaces supplémentaires (voir aussi l'Exemple 1.56)

$$\mathfrak{M} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{K} \right\} \quad \text{et} \quad \mathfrak{N} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{K} \right\}.$$

Alors on a les endomorphismes

$$\pi_{\mathfrak{M}} : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_{\mathfrak{M}} : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ -c & -d \end{pmatrix}$$

et

$$\pi_{\mathfrak{N}} : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \sigma_{\mathfrak{N}} : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -a & -b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

2.2 Applications linéaires et sous-espaces vectoriels

2.2.1 Bases

Théorème 2.24 *Soient $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{M}$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de $\mathfrak{L}$ et $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ une famille de n vecteurs de $\mathfrak{M}$.*

Alors, il existe une et une seule application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathfrak{L}, \mathfrak{M})$ telle que $f(e_i) = f_i$ pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Preuve. Comme $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base de $\mathfrak{L}$, chaque vecteur $\ell \in \mathfrak{L}$ s'écrit de façon unique comme $\ell = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, avec $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$ ses coordonnes par rapport à cette base.

Considérons l'application

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathfrak{L} & \to & \mathfrak{M} \\ & \displaystyle\sum_{i=1}^n x_i e_i & \mapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^n x_i f_i. \end{array}$$

Pour tout couple de vecteurs $\ell = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et $m = \sum_{i=1}^n y_i e_i \in \mathfrak{L}$ et pour tout couple de scalaires $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ on a

$$\begin{aligned} f(\alpha\ell + \beta m) &= f\left(\alpha \sum_{i=1}^n x_i e_i \; + \; \beta \sum_{i=1}^n y_i e_i\right) \\ &= f\left(\sum_{i=1}^n (\alpha x_i + \beta y_i) e_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^n (\alpha x_i + \beta y_i) f_i \\ &= \alpha \sum_{i=1}^n x_i f_i \; + \; \beta \sum_{i=1}^n y_i f_i \\ &= \alpha f\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) + \beta f\left(\sum_{i=1}^n y_i e_i\right) \\ &= \alpha f(\ell) + \beta f(m). \end{aligned}$$

Donc, l'application f est linéaire. De plus, pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ on a clairement $f(e_i) = f_i$.

Cette application linéaire est la seule avec cette propriété. En effet, soit $g \in \mathcal{L}(\mathfrak{L}, \mathfrak{M})$ telle que $g(e_i) = f_i$ pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Puisque tout vecteur $\ell \in \mathfrak{L}$ s'écrit comme combinaison linéaire $\ell = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ pour certains scalaires $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$, on a, d'après la linéarité de g

$$\begin{aligned} g(\ell) &= g\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i g(e_i) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i f_i = \sum_{i=1}^n x_i f(e_i) \\ &= f\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = f(\ell). \end{aligned}$$

Donc $f = g$. ∎

Corollaire 2.25 *Soient $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de $\mathfrak{L}$ et $f, g \in \mathcal{L}(\mathfrak{L}, \mathfrak{M})$.*

Alors $f = g$ si et seulement si $f(e_i) = g(e_i)$ pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Le Théorème 2.24 et le corollaire précédent nous dit que pour définir une action linéaire il est suffisant de définir les images des éléments d'une base.

Exemple 2.26 Considérons la fonction $f \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^2, \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})\right)$ telle que

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}) \\ & \vec{e_1} = (1,0) & \mapsto & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \\ & \vec{e_2} = (0,1) & \mapsto & \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Comme $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ est une base de $\mathbb{R}^2$, la fonction f est bien définie. En effet, il s'agit de la fonction

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}) \\ & (x,y) & \mapsto & \begin{pmatrix} x & 2y & 0 \\ 0 & 2x & y \end{pmatrix} \end{array}$$

Remarquons que dans le Théorème 2.24 on ne fait aucune hypothèse sur la dépendance linéaire des vecteur $f_1, f_2, \ldots, f_n$.

Exemple 2.27 Considérons la fonction $f \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2\right)$ telle que

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & \vec{e_1} = (1,0,0) & \mapsto & (1,0) \\ & \vec{e_2} = (0,1,0) & \mapsto & (0,1) \\ & \vec{e_3} = (0,0,1) & \mapsto & (1,1) \end{array}$$

Comme $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ est une base de $\mathbb{R}^3$, la fonction f est bien définie. En effet, il s'agit de la fonction

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \mapsto & (x+z, y+z) \end{array}$$

Toutefois, les vecteurs $f(\vec{e_1}), f(\vec{e_2}), f(\vec{e_3})$ ne sont pas linéairement indépendants.

2.2.2 Isomorphismes et bases

Rappelons qu'un isomorphisme est une application $f \in \mathcal{L}(\mathfrak{L}, \mathfrak{M})$ qui est bijective. Donc, on peut considérer l'application réciproque $f^{-1} : \mathfrak{M} \to \mathfrak{L}$ définie par $f^{-1}(m) = \ell$ si $f(\ell) = m$.

Proposition 2.28 *Soient $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f un isomorphisme de $\mathfrak{L}$ à $\mathfrak{M}$. Alors l'application f^{-1} est un isomorphisme de $\mathfrak{M}$ à $\mathfrak{L}$.*

Preuve. Comme f est une application bijective, l'application f^{-1} est aussi bijective. Donc, il reste à démonter que $f^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{M}, \mathfrak{L})$.

Soient $m_1, m_2 \in \mathfrak{M}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Comme f est bijective, ils existent des uniques $\ell_1, \ell_2 \in \mathfrak{L}$ tels que $f(\ell_1) = m_1$ et $f(\ell_2) = m_2$.

Alors

$$\begin{aligned} f^{-1}(\alpha m_1 + \beta m_2) &= f^{-1}(\alpha f(\ell_1) + \beta f(\ell_2)) \\ &= f^{-1}(f(\alpha_1 \ell_1 + \beta \ell_2)) \\ &= \alpha \ell_1 + \beta \ell_2 \\ &= \alpha f^{-1}(m_1) + \beta f^{-1}(m_2). \end{aligned}$$

Donc l'application f^{-1} est linéaire. ■

Exemple 2.29 Considérons l'application linéaire

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^4 & \to & \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \\ & (a,b,c,d) & \mapsto & \begin{pmatrix} a & 2b \\ 3c & 4d \end{pmatrix} \end{array}$$

Cette application est un isomorphisme entre $\mathbb{R}^4$ et $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$. Son application réciproque

$$\begin{array}{rccc} f^{-1}: & \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R}^4 \\ & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & (a, \frac{b}{2}, \frac{c}{3}, \frac{d}{4}) \end{array}$$

est aussi un isomorphisme.

Théorème 2.30 *Soient $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(\mathfrak{L}, \mathfrak{M})$. Considérons des vecteurs $e_1, e_2, \ldots, e_n \in \mathfrak{L}$.*

i) Si f est un morphisme injectif et $e_1, e_2, \ldots, e_n$ sont linéairement indépendants sur $\mathfrak{L}$, alors $f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)$ sont linéairement indépendants sur $\mathfrak{M}$.

ii) Si f est un morphisme surjectif et $\mathfrak{L} = span\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, alors $\mathfrak{M} = span\{f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)\}$.

iii) Si f est un morphisme bijectif et $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base de $\mathfrak{L}$, alors $(f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n))$ est une base de $\mathfrak{M}$.

Preuve.

i) Soit f un morphisme injectif de $\mathfrak{L}$ à $\mathfrak{M}$ et $e_1, e_2, \ldots, e_n$ des vecteurs linéairement indépendants sur $\mathfrak{L}$.

Considérons des scalaires $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$\alpha_1 f(e_1) + \alpha_2 f(e_2) + \cdots + \alpha_n f(e_n) = \vec{0}_{\mathfrak{M}}.$$

D'après la linéarité de f on a

$$f\big(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n\big) = \vec{0}_{\mathfrak{M}}.$$

Comme f est injective, cela implique que

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n = \vec{0}_{\mathfrak{L}}$$

et d'après l'indépendance linéaire de $e_1, e_2, \ldots, e_n$ on trouve $\alpha_i = 0$ pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

ii) Soit f un morphisme surjectif de $\mathfrak{L}$ à $\mathfrak{M}$ et $e_1, e_2, \ldots, e_n$ des vecteurs de $\mathfrak{L}$ qui engendrent tout l'espace vectoriel.

Considérons un vecteur $m \in \mathfrak{M}$. Comme f est surjectif, il existe un vecteur $\ell \in \mathfrak{L}$ tel que $f(\ell) = m$. De plus, ce vecteur peut être écrit comme combinaison linéaire

$$\ell = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n$$

pour certains scalaires $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$. En utilisant la linéarité de f, on a

$$m = f\big(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n\big) = \alpha_1 f(e_1) + \alpha_2 f(e_2) + \cdots + \alpha_n f(e_n).$$

Donc, tout vecteur de $\mathfrak{M}$ peut s'écrire comme combinaison linéaire de $f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)$, ce qui implique que span $\{f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)\} = \mathfrak{M}$.

iii) Le point *iii*) clairement suit des deux points précédents.

■

Exemple 2.31 Considérons l'isomorphisme $f \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^4, \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})\right)$ définie dans l'Exemple 2.29. L'image de la base canonique $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}, \vec{e_4})$ de $\mathbb{R}^4$, c'est-à-dire le quadruplet

$$\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 2\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\3 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 4\end{pmatrix}\right)$$

est une base de $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$.

Dans le Chapitre précédent on a vu que tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$. Donc, en particulier, toute paire d'espaces vectoriels $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}$ de la même dimension (finie) sont isomorphes entre eux.

Le Théorème 2.30 nous permet de montrer que cette condition est à la fois nécessaire et suffisante.

Corollaire 2.32 *Soient $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Alors $\mathfrak{L} \simeq \mathfrak{M}$ si et seulement si* $\dim \mathfrak{L} = \dim \mathfrak{M}$.

Exemple 2.33 L'espace des matrices carré 2×2 sur $\mathbb{R}$ a dimension 4, donc il est isomorphe à $\mathbb{R}^4$ (voir Example 2.29).

En général pour tout corps $\mathbb{K}$ et pour tous entiers $m, n \geq 0$ on a $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \simeq \mathbb{K}^{mn}$. L'espace des matrices carrés $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ est donc isomorphe à $\mathbb{K}^{n^2}$.

Exemple 2.34 Considérons l'espace $\mathbb{K}_n[x]$ des polynômes de degré au plus n, c'est-à-dire

$$\mathbb{K}_n[x] = \{P \in \mathbb{K}[x] \mid \deg P \leq n\}.$$

Cet espace vectoriel a dimension $n+1$ sur $\mathbb{K}$, car le $(n+1)$-uplet $(1, x, x^2, \ldots, x^n)$ est une base de l'espace. Donc $\mathbb{K}_n[x] \simeq \mathbb{K}^{n+1}$.

2.2.3 Applications linéaires de $\mathbb{K}^n$ à $\mathbb{K}^m$

Les résultats des sections précédentes nous permettent de caractériser les applications linéaires de $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ avec m, n des entiers positifs.

Pour ne pas alourdir la notation, on utilisera, quand on travaillera avec des n-uplets, une seule parenthèse au lieu de la double parenthèse. C'est-à-dire que l'on posera

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) := f\big((x_1, x_2, \ldots, x_n)\big)$$

pour tout $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$.

On commence par le cas des formes linéaires sur $\mathbb{K}^n$.

Proposition 2.35 *Soit $\mathbb{K}$ un corps, $n \geq 1$ et $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ une application. L'application f est une forme linéaire si et seulement s'il existe $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tels que*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots \alpha_n x_n$$

pour tout $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$.

Preuve. On vérifie facilement qu'une application f définie comme dans l'énoncé est linéaire.

Réciproquement, considérons $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \ldots, \vec{e_n})$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. D'après le Théorème 2.24 la fonction f est univoquement déterminée comme la seule forme linéaire telle que $f(\vec{e_i}) = \alpha_i$ pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. ∎

Exemple 2.36 Considérons le deux fonctions suivantes de $\mathbb{C}^3$ à $\mathbb{C}$

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{C}^3 & \to & \mathbb{C} \\ & (x, y, z, t) & \mapsto & 5x + 3iz + \frac{1}{2}t \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rccc} g : & \mathbb{C}^3 & \to & \mathbb{C} \\ & (x, y, z, t) & \mapsto & 2xy + \frac{z}{t^2+1} \end{array}$$

D'après la Proposition 2.35, $f \in \left(\mathbb{C}^3\right)^*$ tandis que $g \notin \left(\mathbb{C}^3\right)^*$.

On peut maintenant décrire toute application linéaire de $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$.

Théorème 2.37 *Soit $\mathbb{K}$ un corps, $n, m \geq 1$ et $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ une application. L'application f est linéaire si et seulement s'il existe $\alpha_{ij} \in \mathbb{K}$ avec $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$ tels que*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{1i}x_i, \sum_{i=1}^{n} \alpha_{2i}x_i, \ldots, \sum_{i=1}^{n} \alpha_{mi}x_i\big)$$

pour tout $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$.

Preuve. Soient $f_1, f_2, \ldots, f_m$ les composantes de f. D'après la Proposition 2.13 on sait que f est linéaire si et seulement si chaque $f_i : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ est une forme linéaire. Or, la Proposition 2.35 nous dit que f_i est une forme linéaire si et seulement s'il existe $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{in} \in \mathbb{K}$ tels que

$$f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \alpha_{i1}x_1 + \alpha_{i2}x_2 + \cdots + \alpha_{in}x_n$$

pour tout n-uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}$. Donc on a l'équivalence des conditions de l'énoncé. ■

Exemple 2.38 Considérons l'application

$$\begin{array}{cccc} f : & \mathbb{Q}^2 & \to & \mathbb{Q}^3 \\ & (a, b) & \mapsto & (a, \frac{a+b}{2}, b) \end{array}$$

L'application f appartient à $\mathcal{L}\left(\mathbb{Q}^2, \mathbb{Q}^3\right)$ car chaque composante est une forme linéaire de $\mathbb{Q}^2$.

2.2.4 Noyau et image

Soient $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(\mathfrak{L}, \mathfrak{M})$ une application linéaire. Le *noyau* de f est le sous-ensemble de $\mathfrak{L}$ défini par

$$\mathrm{Ker}\,(f) = \{\ell \in \mathfrak{L} \mid f(\ell) = \vec{0}_{\mathfrak{M}}\}.$$

L'*image* de f est le sous-ensemble de $\mathfrak{M}$ défini par

$$\mathrm{Im}\,(f) = \{m \in \mathfrak{M} \mid \exists\, \ell \in \mathfrak{L} \text{ avec } f(\ell) = m\}.$$

Proposition 2.39 *Soient $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(\mathfrak{L}, \mathfrak{M})$. Alors Ker$(f)$ et Im(f) sont des sous-espaces vectoriels de $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{M}$ respectivement.*

Preuve. D'après la Proposition 2.3 on sait que $f(\vec{0}_{\mathfrak{L}}) = \vec{0}_{\mathfrak{M}}$. Donc $\mathrm{Ker}\,(f)$ et $\mathrm{Im}\,(f)$ sont tous les deux non vides.

(a) Considérons deux vecteurs $\ell_1, \ell_2 \in \mathrm{Ker}\,(f) \subset \mathfrak{L}$ et deux scalaires $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Alors

$$\begin{aligned} f(\alpha\ell_1 + \beta\ell_2) &= \alpha f(\ell_1) + \beta f(\ell_2) \\ &= \alpha\vec{0} + \beta\vec{0} = \vec{0} \end{aligned}$$

ce qui implique que $\alpha\ell_1 + \beta\ell_2 \in \mathrm{Ker}\,(f)$ et donc que $\mathrm{Ker}\,(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{L}$.

(b) Considérons deux vecteurs $m_1, m_2 \in \mathrm{Im}\,(f) \subset \mathfrak{M}$ et deux scalaires $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Alors, il existe deux vecteurs $\ell_1, \ell_2 \in \mathfrak{L}$ tels que $m_1 = f(\ell_1)$ et $m_2 = f(\ell_2)$. Donc,

$$\begin{array}{rcl} \alpha m_1 + \beta m_2 & = & \alpha f(\ell_1) + \beta f(\ell_2) \\ & = & f\,(\alpha \ell_1 + \beta \ell_2) \end{array}$$

ce qui implique que $\alpha m_1 + \alpha m_2 \in \mathrm{Im}\,(f)$ et donc que $\mathrm{Im}\,(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}$.

■

Exemple 2.40 Considérons l'application linéaire suivante entre les deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}^2$

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{C}^2 \\ & (x, y) & \mapsto & (x - y, 0) \end{array}$$

Le noyau de f est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$

$$\mathrm{Ker}\,(f) = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

tandis que l'image de f est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^2$

$$\mathrm{Im}\,(f) = \{(z, 0) \mid z \in \mathbb{R}\}.$$

Proposition 2.41 *Soit $f \in \mathcal{L}\,(\mathfrak{L}, \mathfrak{M})$ avec $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.*

a) f est injective si et seulement si Ker $(f) = \{\vec{0}_{\mathfrak{L}}\}$.

b) f est surjective si et seulement si Im $(f) = \mathfrak{M}$.

Preuve.

a) Soit f injective. Alors le seul vecteur $\ell \in \mathfrak{L}$ tel que $f(\ell) = \vec{0}_{\mathfrak{M}}$ est $\vec{0}_{\mathfrak{L}}$. Réciproquement, si $\mathrm{Ker}\,(f) = \{\vec{0}_{\mathfrak{L}}\}$, alors

$$f(\ell_1) = f(\ell_2) \iff f(\ell_1 - \ell_2) = \vec{0}_{\mathfrak{M}} \iff \ell_1 - \ell_2 = \vec{0}_{\mathfrak{L}} \iff \ell_1 = \ell_2.$$

Donc f est injective.

b) Évident.

■

Exemple 2.42 Considérons l'application linéaire

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{C}^2 \\ & (x, y) & \mapsto & (x + iy, x - iy) \end{array}$$

L'application f est injective car $\mathrm{Ker}\,(f) = \{(0, 0)\}$, tandis qu'elle n'est pas surjective car l'élément $(1, i) \in \mathbb{C}^2 \setminus \mathrm{Im}\,(f)$.

Étant donné une application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathfrak{L}, \mathfrak{M})$ avec $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}$ deux $\mathbb{K}$-espaces linéaires, on appelle *rang* de f, et on le note par $\mathrm{rg}(f)$ la dimension de $\mathrm{Im}(f)$. On note aussi par $\mathrm{i}(f)$ la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$.

Théorème 2.43 (du rang) *Soient $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}$ deux $\mathbb{K}$-espaces de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(\mathfrak{L}, \mathfrak{M})$. Alors on a*

$$\dim(\mathfrak{L}) = i(f) + rg(f).$$

Preuve. Posons $n = \dim(\mathfrak{L})$ et $k = \mathrm{i}(f) = \dim(\mathrm{Ker}(f))$.

Considérons une base $(e_1, e_2, \ldots, e_k)$ de $\mathrm{Ker}(f)$.

Par le Théorème de la base incomplète, on peut trouver $n-k$ vecteurs $e_{k+1}, \ldots, e_n$ tels que le n-uplet $(e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots e_n)$ est une base de $\mathfrak{L}$.

On va montrer que le $(n-k)$-uplet $(f(e_{k+1}), f(e_{k+1}), \ldots, f(e_n))$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$. Cela prouvera que $\mathrm{i}(f) = n-k$.

- La famille de vecteurs $\{f(e_{k+1}), f(e_{k+1}), \ldots, f(e_n)\}$ est linéairement indépendante. En effet, supposons que

$$\vec{0}_{\mathfrak{M}} = \sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i f(e_i) = \sum_{i=k+1}^{n} f(\alpha_i e_i) = f\left(\sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i e_i\right)$$

pour certains scalaires $\alpha_{k+1}, \alpha_{k+2}, \ldots, \alpha_n$. Alors

$$\sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i e_i \in \mathrm{Ker}(f).$$

Cela implique qu'il existe des scalaires $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ tels que

$$\sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i e_i = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i,$$

et donc que

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i + \sum_{i=k+1}^{n} (-\alpha_i) e_i = \vec{0}_{\mathfrak{L}}.$$

Puisque $(e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n)$ est une base de $\mathfrak{L}$ cela implique en particulier que $\alpha_{k+1} = \cdots = \alpha_n = 0$.

- Montrons que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{span}\{f(e_{k+1}), \ldots, f(e_n))\}$. En effet, soit $m \in \mathrm{Im}(f)$. Alors il existe un vecteur $\ell = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \in \mathfrak{L}$, avec $\alpha_i \in \mathbb{K}$, tel que

$m = f(\ell)$. Donc

$$\begin{aligned} m &= f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(e_i) \\ &= \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f(e_i) + \sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i f(e_i) \\ &= \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \vec{0}_{\mathfrak{M}} + \sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i f(e_i) \\ &= \sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i f(e_i). \end{aligned}$$

Donc $(f(e_k), f(e_{k+1}), \ldots, f(e_n))$ est une base de $\mathrm{Im}\,(f)$, ce qui prouve la formule de l'énoncé. ∎

Exemple 2.44 Considérons l'application linéaire

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{Q}^3 & \to & \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{Q}) \\ & (a,b,c) & \mapsto & \begin{pmatrix} a-b & c \\ c & a-b \end{pmatrix} \end{array}$$

On peut vérifier facilement que

$$\mathrm{Ker}\,(f) = \{(a,a,0) \mid \ a \in \mathbb{Q}\} \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}\,(f) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Donc on a $\dim \mathbb{Q}^3 = 3 = 1 + 2 = \mathrm{i}\,(f) + \mathrm{rg}\,(f)$.

En utilisant le Théorème précédent on peut prouver le résultat suivant.

Théorème 2.45 *Soit* $f \in \mathcal{L}(\mathfrak{L}, \mathfrak{M})$ *avec* $\dim(\mathfrak{L}) = \dim(\mathfrak{M})$. *Alors*

$$f \textit{ est injective} \iff f \textit{est surjective} \iff f \textit{ est bijective}.$$

Preuve. Une application est bijective si et seulement si elle est à la fois injective et surjective. Donc il suffit de prouver seulement la première double implication.

D'après la Proposition 2.41 une application linéaire f est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}\,(f) = \{\vec{0}_{\mathfrak{L}}\}$, c'est-à-dire si et seulement si $\mathrm{i}\,(f) = 0$.

D'autre part, toujours d'après la Proposition 2.41 il suit que f est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}\,(f) = \mathfrak{M}$, c'est-à-dire si et seulement si $\mathrm{rg}\,(f) = \dim(\mathfrak{M}) = \dim(\mathfrak{L})$.

Donc, en utilisant le Théorème 2.43, on a

$$f \text{ est injective} \iff \mathrm{i}\,(f) = 0 \iff \dim(\mathfrak{L}) = \mathrm{rg}\,(f) \iff f \text{ est surjective.}$$

∎

Exemple 2.46 Considérons l'application linéaire entre les deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{C}^2$.

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{C}^2 \\ & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & (a+ib, c-id) \end{array}$$

Les deux espaces vectoriels ont la même dimension sur $\mathbb{R}$

$$\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})) = 4 = \dim_{\mathbb{R}}\left(\mathbb{C}^2\right).$$

De plus, l'application f est injective, car $\operatorname{Ker}(f) = \left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$. Donc, l'application f est un isomorphisme entre les deux espaces.

Une conséquence intéressante du théorème que l'on vient de montrer est la suivante.

Corollaire 2.47 (Alternative de Fredholm) *Soit $\mathfrak{L}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in End(\mathfrak{L})$. Alors*

a) soit l'équation

$$f(\ell) = m$$

possède une et une seule solution pour tout $m \in \mathfrak{L}$,

b) soit l'équation

$$f(\ell) = \vec{0}$$

possède une infinité de solutions non nulles.

Preuve. Considérons un endomorphisme $f : \mathfrak{L} \to \mathfrak{L}$. On a deux cas.

- Soit f est injectif et donc, d'après le Théorème 2.45, f est aussi surjectif et donc un isomorphisme. Cela implique que pour tout $m \in \mathfrak{L}$ il existe un et un seul vecteur $\ell \in \mathfrak{L}$ tel que $f(\ell) = m$.
- Soit f n'est pas injectif et donc on a $\dim(\operatorname{Ker}(f)) \geq 1$. C'est-à-dire qu'il existe un vecteur $\ell \in \mathfrak{L} \setminus \{\vec{0}\}$ tel que $\alpha\ell \in \operatorname{Ker}(f)$ pour tout scalaire $\alpha \in \mathbb{K}$. Donc on a $f(\alpha\ell) = \vec{0}$ pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$.

■

Le théorème du rang nous permet aussi de calculer la dimension d'un hyperplan de $\mathbb{K}^n$.

Remarquons que pour toute forme linéaire $f \neq f_0$ on a $\operatorname{rg}(f) = 1$, car $\operatorname{rg}(f) > 0$ (seulement l'application nulle f_0 a rang zéro) et $\operatorname{rg}(f) \leq \dim \mathbb{K} = 1$.

Corollaire 2.48 *Tout hyperplan de $\mathbb{K}^n$ a dimension $n-1$.*

Preuve. Soit

$$\mathfrak{M}_{\vec{a}} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mid a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots a_nx_n = 0\}$$

un hyperplan de $\mathbb{K}^n$, avec $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Considérons la forme linéaire

$$f_{\vec{a}} : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \to & \mathbb{K} \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) & \mapsto & a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \end{array}$$

Cette application est surjective, car tout $\alpha \in \mathbb{K}$ est image par f de $(\frac{\alpha}{a_1}, 0, \dots, 0)$. De plus, on a $\mathfrak{M}_{\vec{a}} = \mathrm{Ker}\,(f_{\vec{a}})$. D'après le Théorème 2.43 et la remarque ci-dessus, on a que $\dim(\mathfrak{M}_{\vec{a}}) = \mathrm{i}\,(f) = \dim(\mathbb{K}^n) - \mathrm{rg}\,(f) = n - 1$. ∎

Exemple 2.49 Considérons le vecteur $\vec{a} = (2, 1, -1) \in \mathbb{R}^3$. L'hyperplan de $\mathbb{R}^3$

$$\mathfrak{M}_{\mathfrak{a}} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y - z = 0\}$$

a dimension 2.

2.3 Espace des applications linéaires

2.3.1 Matrice associée

Soient $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{M}$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et non nulle. Considérons une base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ de $\mathfrak{L}$ et une base $(d_1, d_2, \dots, d_m)$ de $\mathfrak{M}$.

À toute application $f \in \mathcal{L}(\mathfrak{L}, \mathfrak{M})$ on peut associer une matrice $A_f \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ relative aux deux bases ci-dessus, dont les coefficients de la j-ème colonne sont les coordonnées de $f(e_j)$ dans la base $(d_1, d_2, \dots, d_m)$.

C'est-à-dire que si pour $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ le vecteur $f(e_i)$ peut s'écrire comme

$$f(e_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ji} d_j.$$

avec $a_{ji} \in \mathbb{K}$, alors la matrice $A_f \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ sera donnée par

$$A_f = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} f(e_1) & f(e_2) & & f(e_n) \end{array} \end{array}.$$

Cette matrice est dite *la matrice associée à* f (ou simplement *la matrice de* f) dans les bases $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ et $(d_1, d_2, \dots, d_m)$.

Exemple 2.50 Considérons l'application linéaire

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (a, b) & \mapsto & (2a, a + b, 3b) \end{array}$$

La matrice associée à f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ respectivement est

$$A_f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R}).$$

Exemple 2.51 Soit $f_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{L}, \mathfrak{M})$ l'application nulle. Pour toute paire de bases de $\mathfrak{L}$ et de $\mathfrak{M}$ on a

$$A_{f_0} = 0_{m\times n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{m\times n} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$$

où $n = \dim(\mathfrak{L})$ et $m = \dim(\mathfrak{M})$.

Quand on travaille avec un endomorphisme $f : \mathfrak{L} \to \mathfrak{L}$ et on fixe une base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ à la fois comme base de départ et d'arrivée de $\mathfrak{L}$, on appelle A_f simplement *la matrice associée à f dans la base* $(e_1, e_2, \dots, e_n)$.

Exemple 2.52 Soit $\mathrm{id}_{\mathfrak{L}}$ l'endomorphisme identité d'un espace vectoriel $\mathfrak{L}$ de dimension n. Alors, pour toute base de $\mathfrak{L}$, on a

$$A_{\mathrm{id}} = I_{n\times n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{n\times n} \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K}).$$

Remarquons que l'ordre des deux bases est important. En effet, un endomorphisme f est, en général, représentée par des matrices différentes selon l'ordre qu'on donne aux deux bases dans la définition (dans le cas d'une application linéaire dans $\mathcal{L}(\mathfrak{L}, \mathfrak{M})$ avec $\mathfrak{L} \neq \mathfrak{M}$, les deux bases sont forcement différentes).

Exemple 2.53 Considérons les deux bases $E = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ et $D = (d_1, d_2, d_3)$ de $\mathbb{R}^3$, où la première est la base canonique et la deuxième est donnée par

$$d_1 = (1, 1, 0), \quad d_2 = (1, 0, -1), \quad \text{et} \quad d_3 = (0, 1, 2).$$

La matrice associée à l'identité dans les bases E et D est

$$A_{\mathrm{id}}^{(E,D)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

tandis que la matrice associée à l'identité dans les bases D et E est

$$A_{\mathrm{id}}^{(D,E)} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

2.3.2 L'espace vectoriel $\mathcal{L}(\mathfrak{L}, \mathfrak{M})$

Rappelons que l'ensemble

$$\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K}) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \mid a_{ij} \in \mathbb{K} \right\}$$

est un espace vectoriel avec opérations $A+B$, λA pour tout $A, B \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Cet espace a dimension $n \cdot m$. En effet, une base de $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ est donnée par les matrices E_{ij} (voir Exemple 1.38).

Proposition 2.54 *Soient $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Alors $\mathcal{L}(\mathfrak{L}, \mathfrak{M})$ est un espace vectoriel de dimension* $\dim(\mathfrak{L}) \cdot \dim(\mathfrak{M})$.

Preuve. D'après le Corollaire 2.11 on sait que $\mathcal{L}(\mathfrak{L}, \mathfrak{M})$ est un espace vectoriel.

Posons $n = \dim(\mathfrak{L})$ et $m = \dim(\mathfrak{M})$. On va prouver que $\mathcal{L}(\mathfrak{L}, \mathfrak{M})$ et $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ sont isomorphes.

On fixe $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ et $(d_1, d_2, \ldots, d_m)$ deux bases respectivement de $\mathfrak{L}$ et de $\mathfrak{M}$.

Alors, on a vu que à tout $f \in \mathcal{L}(\mathfrak{L}, \mathfrak{M})$ tel que $f(e_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ji} d_j$ on peut associer la matrice A_f dans les bases $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ et $(d_1, d_2, \ldots, d_m)$.

L'application

$$\begin{array}{rrcl} \varphi : & \mathcal{L}(\mathfrak{L}, \mathfrak{M}) & \to & \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K}) \\ & f & \mapsto & A_f \end{array}$$

est linéaire et bijective (`Exercise`), donc un isomorphisme.

Cela implique, en particulier, que $\dim(\mathcal{L}(\mathfrak{L}, \mathfrak{M})) = \dim(\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})) = n \cdot m$. ∎

Remarquons que la proposition précédente nous dit que, une fois fixés les deux bases $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ et $(d_1, d_2, \ldots, d_m)$ de $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{M}$ respectivement, on a pour tout $f \in \mathcal{L}(\mathfrak{L}, \mathfrak{M})$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$

$$A_{f+g} = A_f + A_g \quad \text{et} \quad A_{\alpha f} = \alpha A_f$$

où $A_f, A_g, A_{f+g}, A_{\alpha f}$ sont les matrices associées respectivement aux applications linéaires $f, g, f+g$ et αf.

Exemple 2.55 Soient $f, g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ avec f comme dans l'Exemple 2.50 et

$$\begin{array}{rrcl} g : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (a,b) & \mapsto & (-a,-b,a) \end{array}$$

Les matrices associées à $g, -g, f+g$ et $f-g$ sont

$$A_g = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; A_{-g} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \; A_{f+g} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } A_{f-g} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Corollaire 2.56 *L'ensemble des endomorphismes* $End(\mathfrak{L})$ *d'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* $\mathfrak{L}$ *de dimension finie est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension* $\dim(\mathfrak{L})^2$.

Dans le Corollaire 2.25 on a prouvé qu'une application linéaire est univoquement déterminée par son action sur une base. À l'aide de la matrice associée, on peut donner une méthode pour reconstruire l'action de l'application à partir de l'action sur une base.

Rappelons que pour tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathfrak{L}$ de dimension n on a

$$\mathfrak{L} \simeq \mathbb{K}^n \simeq \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}),$$

et que, fixé une base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de $\mathfrak{L}$ on peut identifier

$$\sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in \mathfrak{L} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$$

où $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sont les coordonnés du vecteur dans la base fixé.

Proposition 2.57 *Soit* $f \in \mathcal{L}(\mathfrak{L}, \mathfrak{M})$ *avec* $\mathfrak{L}$ *et* $\mathfrak{M}$ *deux* $\mathbb{K}$*-espaces linéaires.*

Alors pour tout vecteur $\vec{x} \in \mathfrak{L}$ *on a*

$$f(\vec{x}) = A_f \vec{x}$$

où A_f *est la matrice associée à* f *dans deux bases fixées* $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ *et* $(d_1, d_2, \ldots, d_m)$ *de* $\mathfrak{L}$ *et* $\mathfrak{M}$ *respectivement,* $\vec{x}$ *le vecteur colonne* $1 \times n$ *avec coordonnées dans la première base et* $f(\vec{x})$ *le vecteur colonne* $1 \times m$ *avec coordonnées dans la deuxième base.*

Preuve. Considérons un vecteur $\vec{x} \in \mathfrak{L}$ de coordonnées $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ par rapport à la base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$. D'après la remarque ci-dessus, on peut associer à ce vecteur le vecteur colonne

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \quad \longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Similairement, on peut associer au vecteur $f(\vec{x}) \in \mathfrak{M}$ le vecteur colonne

$$f(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{m} y_i d_i \quad \longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

où $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ sont les coordonnées de $f(\vec{x})$ dans la base $(d_1, d_2, \ldots, d_m)$. Comme

$$\sum_{j=1}^{m} y_j d_j = f(\vec{x}) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{m} (a_{ji} d_j) = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i\right) d_j$$

par unicité des coordonnées on a

$$y_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i$$

pour tout $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ et donc, d'après la définition de la matrice associée à f,

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A_f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}.$$

■

Exemple 2.58 Soit $f \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2\right)$ l'application linéaire définie dans l'Exemple 2.27. La matrice associée à f dans les deux bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ est

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour tout vecteur $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ on a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z \\ y+z \end{pmatrix}$$

et donc on trouve $f(x, y, z) = (x + z, y + z)$.

2.3.3 Composition d'applications linéaires

Soient $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Considérons deux application linéaires $f \in \mathcal{L}(\mathfrak{L}, \mathfrak{M})$ et $g \in \mathcal{L}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$.

D'après la Proposition 2.6, l'application composée $g \circ f \in \mathcal{L}(\mathfrak{L}, \mathfrak{N})$ est bien définie.

Proposition 2.59 *Soient $f \in \mathcal{L}(\mathfrak{L}, \mathfrak{M})$ et $g \in \mathcal{L}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ avec $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.*

Soient A_f la matrice associée à f dans les bases $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de $\mathfrak{L}$ et $(d_1, d_2, \ldots, d_m)$ de $\mathfrak{M}$ et A_g la matrice associée à g dans les bases $(d_1, d_2, \ldots, d_m)$ de $\mathfrak{M}$ et $(f_1, f_2, \ldots, f_p)$ de $\mathfrak{N}$.

Alors la matrice associée à $g \circ f$ dans les bases $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ et $(f_1, f_2, \ldots, f_p)$ est

$$A_{g \circ f} = A_g \cdot A_f.$$

Preuve. D'après l'hypothèse on a $\dim(\mathfrak{L}) = n$, $\dim(\mathfrak{M}) = m$ et $dim(\mathfrak{N}) = p$. Cela implique que

$$\dim(\mathcal{L}(\mathfrak{L},\mathfrak{M})) = mn, \quad \dim(\mathcal{L}(\mathfrak{M},\mathfrak{N})) = np, \quad \text{et} \quad \dim(\mathcal{L}(\mathfrak{L},\mathfrak{N})) = np.$$

Donc on a $A_f \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $\mathcal{A}_g \in \mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_{g\circ f} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. De plus, le produit $A_g \cdot A_f \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ est bien défini.

Posons $A_f = (a_{ij})_{m\times n}$, $A_g = (b_{jk})_{p\times m}$ et $A_{g\circ f} = (c_{ji})_{p\times n}$.

Pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ on a

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{p} c_{ji} f_j &= (g\circ f)(e_i) = g(f(e_i)) \\
&= g\left(\sum_{k=1}^{m} a_{ki} d_k\right) = \sum_{k=1}^{m} a_{ki} g(d_k) \\
&= \sum_{k=1}^{m} a_{ki}\left(\sum_{j=1}^{p} b_{jk} f_j\right) \\
&= \sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{k=1}^{m} b_{jk} a_{ki}\right) f_j
\end{aligned}$$

Comme $(f_1, f_2, \ldots, f_p)$ est une base de $\mathfrak{N}$ cela implique que pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ et tout $j \in \{1, 2\ldots, p\}$ on a $c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} b_{jk} a_{ki}$, ce qui implique que

$$A_{g\circ f} = (c_{ji})_{p\times n} = (b_{jk})_{p\times m} (a_{ki})_{m\times n} = A_g \cdot A_f.$$

∎

Exemple 2.60 Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ comme dans l'Exemple 2.50 et g l'application linéaire définie par

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \\ & (x, y, z) & \mapsto & \begin{pmatrix} x & y \\ -y & z \end{pmatrix} \end{array}$$

L'application $g\circ f$ est donnée par

$$\begin{array}{rccc} g\circ f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \\ & (a, b) & \mapsto & \begin{pmatrix} 2a & a+b \\ -a-b & 3b \end{pmatrix}. \end{array}$$

Les matrices associées aux applications f, g et $g\circ f$ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ sont

$$A_f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_{g\circ f} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

et on vérifie facilement que $A_{g\circ f} = A_g \cdot A_f$.

Le résultat suivant est conséquence de la Proposition 2.59 ainsi que de la Proposition 1.59.

Proposition 2.61 *Soit $f \in \mathcal{L}(\mathfrak{L}, \mathfrak{M})$ avec $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de la même dimension finie n et A_f la matrice associée à f dans deux bases $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ et $(d_1, d_2, \dots, d_n)$ de $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{M}$ respectivement. Alors*

$$f \text{ est un isomorphisme} \quad \Longleftrightarrow \quad A_f \text{ est inversible.}$$

De plus, dans ce cas-ci, la matrice associée à f^{-1} dans les bases $(d_1, d_2, \dots, d_n)$ et $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est

$$A_{f^{-1}} = (A_f)^{-1}.$$

Preuve. D'après le Théorèmé 2.30 on sait que f est un isomorphisme si et seulement si le n-uplet $\big(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)\big)$ est une base de $\mathfrak{M}$.

Or, la matrice A_f est exactement la matrice dont la j-ème colonne a pour coefficients les coordonnées de $f(e_j)$ dans la base $(d_1, d_2, \dots, d_n)$.

D'après la Proposition 1.59, $\big(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)\big)$ est une base si et seulement si la matrice A_f est inversible, d'où le résultat.

De plus, d'après la Proposition 2.59, la matrice associée à $id_{\mathfrak{L}} = f^{-1} \circ f$ dans la base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est donnée par le produit $A_{f^{-1}} \cdot A_f$, où $A_{f^{-1}}$ est la associée à f^{-1} dans les bases $(d_1, d_2, \dots, d_n)$ et $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ et A_f la matrice associé à f dans les bases $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ et $(d_1, d_2, \dots, d_n)$.

Or, $f_{\mathrm{id}} = I_{n\times n}$ est la matrice identité, donc on a $I_{n\times n} = A_{f^{-1}} \cdot A_f$, d'où on en déduit $A_{f^{-1}} = (A_f)^{-1}$ ∎

Exemple 2.62 Considérons l'automorphisme

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{C}^4 & \to & \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{C}) \\ & (x, y, z, t) & \mapsto & \begin{pmatrix} ix & y \\ z & it \end{pmatrix} \end{array}$$

et son inverse

$$\begin{array}{cccc} f^{-1} & \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{C}) & \to & \mathbb{C}^4 \\ & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \to & (-ia, b, c, -id) \end{array}.$$

Les matrices associées à f et f^{-1} dans les bases canoniques sont

$$A_f = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_{f^{-1}} = \begin{pmatrix} -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix}.$$

2.3.4 Groupe général linéaire

Soit $\mathfrak{L}$ un espace vectoriel. Rappelons que l'ensemble $\mathrm{Aut}(\mathfrak{L})$ des automorphismes de $\mathfrak{L}$ est aussi noté par $\mathrm{GL}(\mathfrak{L})$ et il est appelé le groupe général linéaire de $\mathfrak{L}$.

Exemple 2.63 $f_0 \notin \mathrm{GL}(\mathfrak{L})$, tandis que $\mathrm{id}_{\mathfrak{L}} \in \mathrm{GL}(\mathfrak{L})$.

L'exemple précédent nous montre que $\mathrm{GL}(\mathfrak{L})$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathrm{End}(\mathfrak{L})$. Néanmoins, à l'aide de la composition d'endomorphismes on peut lui donner une structure algébrique.

Théorème 2.64 *Soit $\mathfrak{L}$ un espace vectoriel. Alors $GL(\mathfrak{L})$ est un groupe avec opération la composition d'applications.*

Preuve. Il suffit de remarquer que l'opération de composition $g \circ f$ pour deux endomorphismes $g, f \in \mathrm{End}(\mathfrak{L})$ est bien définie, que l'endomorphisme identité $\mathrm{id}_{\mathfrak{L}}$ est l'élément neutre (à gauche et à droite) de cette opération et que pour tout $f \in \mathrm{End}(\mathfrak{L})$ l'automorphisme f^{-1} est l'élément inverse (à gauche et à droite) de f. ■

Remarquons que le groupe $\mathrm{GL}(\mathfrak{L})$ n'est pas abélien, car la composition n'est pas une opération commutative, c'est-à-dire que, en général, $f \circ g \neq g \circ f$.

L'ensemble $\mathrm{GL}(\mathfrak{L})$ muni des opération de somme et de composition et de produit par scalaire possède une structure d'*algèbre associative*[1]. C'est-à-dire que pour tous $f, g \in \mathrm{GL}(\mathfrak{L})$ et tout $\alpha \in \mathbb{K}$, les applications $f + g, f \circ g, \alpha f$ sont bien définies et que

$$(\alpha f) \circ g = f \circ (\alpha g) = \alpha(f \circ g).$$

D'après la Section précédente, on sait que tout endomorphisme d'un espace vectoriel $\mathfrak{L}$ s'identifie avec une matrice $n \times n$, avec $n = \dim(\mathfrak{L})$. De plus, comme conséquence de la Proposition 2.61 on a la caractérisation suivante.

Corollaire 2.65 *L'espace $GL(\mathfrak{L})$ d'automorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathfrak{L}$ s'identifie comme groupe avec le groupe général linéaire*

$$GL_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K}) \mid \det A \neq 0\}.$$

Le corollaire précédente nous dit que $\mathrm{GL}(\mathfrak{L})$ et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ sont des groupes isomorphes[2].

Rappelons que pour toutes matrices $A, B \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ on a

$$\det(AB) = \det(A)\det(B),$$

et donc que AB et $A^{-1} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ pour tout $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

1. Pas le but de ce cours de vous détailler ça !
2. Un isomorphisme ϕ de groupes se définit de façon similaire à un isomorphisme d'espaces vectoriels : ϕ est bijectif et $\phi(A \cdot B) = \phi(A) \cdot \phi(B)$.

Exemple 2.66 Considérons les deux bases de $\mathbb{R}^3$ $E = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ et $D = (d_1, d_2, d_3)$ comme dans l'Exemple 2.53.

Soit $f \in \mathbb{R}^3$ l'endomorphisme qui envoie la première base dans la deuxième, c'est-à-dire tel que

$$f(\vec{e_1}) = d_1, \quad f(\vec{e_2}) = d_2 \quad \text{et} \quad f(\vec{e_3}) = d_3.$$

La matrice A_f associée à f dans la base canonique

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

tandis que la matrice $A_{f^{-1}}$ associée à f^{-1} dans la base canonique est

$$A_{f^{-1}} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

En accord avec la proposition précédente on a $A_{f^{-1}} \cdot A_f = I_{3\times 3}$.

2.3.5 Polynôme, déterminant et trace d'un endomorphisme

Soit $f \in \mathrm{End}\,(\mathfrak{L})$ avec $\mathfrak{L}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Notons

$$f^0 = \mathrm{id}_{\mathfrak{L}} \quad \text{et} \quad f^k := \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{k} \quad \text{pour tout } k \geq 1.$$

Depuis la section précédente on sait que pour tous $f_1, f_2, \ldots, f_n \in \mathrm{End}\,(\mathfrak{L})$ et pour tous scalaires $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{L}$ la combinaison linéaire d'endomorphismes

$$\alpha_1 f_1^{k_1} + \alpha_2 f_2^{k_2} + \cdots + \alpha_n f_n^{k_n}$$

est encore un endomorphisme de $\mathfrak{L}$.

Exemple 2.67 Considérons les deux endomorphismes de $\mathbb{R}^2$

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (a,b) & \mapsto & (a-b, 2b) \end{array} \quad \text{et} \quad g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (a,b) & \mapsto & (b,a) \end{array}.$$

Alors l'endomorphisme $2f^2 - g^4 + f^0$ est donné par

$$2f^2 - g^4 + f^0: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (a,b) & \mapsto & (2a-6b, 8b) \end{array}.$$

Étant donné un polynôme $P = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \in \mathbb{K}[x]$ on note pour tout endomorphisme $f \in \mathrm{End}\,(\mathfrak{L})$

$$P(f) := a_0 \mathrm{id}_{\mathfrak{L}} + a_1 f + \cdots + a_n f^n$$

et similairement, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$

$$P(A) := a_0 I_{n\times n} + a_1 A + \cdots + a_n A^n.$$

Proposition 2.68 *Soit $f \in End(\mathfrak{L})$ avec $\mathfrak{L}$ un $\mathbb{K}$-espace linéaire. Alors, pour tout $P, Q \in \mathbb{K}[x]$ on a*

$$(P+Q)(f) = P(f) + Q(f) \quad et \quad (PQ)(f) = P(f) \circ Q(f) = Q(f) \circ P(f).$$

De plus, si A_f est la matrice associée à f dans une base de $\mathfrak{L}$, alors la matrice associée à $P(f)$ dans la même base est $P(A_f)$.

Preuve. La première partie de l'énoncé résulte facilement de la définition des opérations dans l'espace des endomorphismes (somme et composition) et des opérations dans l'espace des polynômes (somme et multiplication) (`Exercice`).

Pour montrer la deuxième partie, on utilise les résultats montrés dans la Section 2.3.2. Supposons d'abord que P soit un monôme et raisonnons par récurrence sur le degré de P.

- Si $P = a_0$ on a $P(f) = a_0 f$ alors $A_{a_0 f} = a_0 A_f$.
- Si $P = a_n x^n$, alors on peut écrire $P(f) = (a_n f) \circ f$ et d'après l'hypothèse de récurrence on a

$$\begin{aligned} A_{a_n f^n} &= A_{(a_n f^{n-1}) \circ f} = A_{a_n f^{n-1}} \cdot A_f \\ &= a_n (A_f)^{n-1} A_f = a_n (A_f)^n. \end{aligned}$$

Si maintenant $P = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \in \mathbb{K}[x]$, on a, d'après les points précédents

$$\begin{aligned} A_{P(f)} &= A_{a_0 + a_1 f + \cdots + a_n f^n} \\ &= A_{a_0} + A_{a_1 f} + \cdots + A_{a_n f^n} \\ &= a_0 A_{\text{id}} + a_1 A_f + \cdots + a_n (A_f)^n \\ &= P(A_f). \end{aligned}$$

■

Exemple 2.69 Soient $f \in \text{End}\left(\mathbb{R}^2\right)$ comme dans l'Exemple 2.67.

Soit $P = 1 + 2x - 3x^2 \in \mathbb{R}[x]$. Alors la matrice associée à $P(f)$ dans la base canonique est

$$\begin{aligned} A_{P(f)} &= A_{\text{id} + 2f - 3f^2} \\ &= A_{\text{id}} + 2A_f - 3(A_f)^2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En effet on a

$$\begin{aligned} P(f): \quad \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (a, b) &\mapsto (-b, -b) \end{aligned}$$

2.4 Rang et déterminant d'une application linéaire

2.4.1 Changement de bases

Dans les sections précédents on a vu que pour tout $f \in \mathcal{L}(\mathfrak{L}, \mathfrak{M})$ avec $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}$ espaces vectoriels de dimension finie, la matrice A_f dépend du choix des bases E et D de $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{M}$ respectivement.

La matrice $A_f^{(E,D)}$ est telle que

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A_f^{(E,D)} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

pour tout vecteur $\vec{x}$ de coordonnées $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dans la base E tel que le vecteur $f(\vec{x})$ soit de coordonnées $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ dans la base D.

Dans la Section 1.5.1 on a vu que, pour toute autre base $E' = (e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$ de $\mathfrak{L}$ il existe une matrice $P = (p_{ik})_{n\times n}$, appelée matrice de passage de E à E' telle que

$$e'_i = \sum_{k=1}^{n} p_{ki} e_k$$

pour tout $i \in \{1, 2 \ldots, n\}$.

Considérons un vecteur $\ell \in \mathfrak{L}$ de coordonnées $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dans la base E et de coordonnées $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ dans la base E'. On a donc

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} x_k e_k &= \sum_{i=1}^{n} x'_i e'_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} x'_i \left(\sum_{k=1}^{n} p_{ki} e_k \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} p_{ki} x'_i \right) e_k. \end{aligned}$$

Comme $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est un base de $\mathfrak{L}$, cela implique que pour tout $k \in \{1, 2 \ldots, n\}$ on a $x_k = \sum_i p_{ki} x'_i$.

En passant aux matrices on trouve

$$P \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

et donc

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \left(A_f^{(E,D)} \cdot P \right) \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}.$$

Comme, par définition de matrice associée dans deux bases on a aussi

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A_f^{(E',D)} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$$

et comme les deux équations sont vérifiés pour tout vecteur $\ell \in \mathfrak{L}$, on trouve l'égalité

$$A_f^{(E',D)} = A_f^{(E,D)} \cdot P.$$

Symétriquement, si l'on considère une nouvelle base D' de $\mathfrak{M}$, avec sa matrice de passage T de D à D', on peut trouver

$$A_f^{(E,D')} = T^{-1} \cdot A_f^{(E,D)}.$$

On peut résumer les deux égalités dans le théorème suivant.

Théorème 2.70 *Soient E, E' et D, D' des bases respectivement de $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{M}$ avec matrices de passage P et T respectivement. Alors*

$$A_f^{(E',D')} = T^{-1} \cdot A_f^{(E,D)} \cdot P.$$

Donc, toute application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathfrak{L}, \mathfrak{M})$, avec $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension respectivement n et m est représentée par une famille de matrices dans $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ liées par la relation

$$A_1 \sim A_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\, P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), T \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{K}) \quad A_1 = T^{-1} \cdot A_2 \cdot P.$$

2.4.2 Rang d'une application

Une conséquence intéressante du Théorème 2.70 est que toute application linéaire peut être représenté d'une matrice “simple”, comme dans le corollaire suivant.

Rappelons que pour tout application linéaire f, $\mathrm{i}(f)$ est la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{rg}(f)$ la dimension de $\mathrm{Im}(f)$.

Corollaire 2.71 *Soit $f \in \mathcal{L}(\mathfrak{L}, \mathfrak{M})$ avec $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension respectivement n et m. Posons $r = rg(f)$ et $i = i(f)$.*

Alors il existe une base $\tilde{E}$ de $\mathfrak{L}$ et une base $\tilde{D}$ de $\mathfrak{M}$ telles que

$$A_f^{(\tilde{E},\tilde{D})} = \begin{pmatrix} I_{r\times r} & 0_{r\times i} \\ 0_{i\times r} & 0_{i\times i} \end{pmatrix}_{m\times n}$$

Preuve. Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n)$ une base de $\mathfrak{L}$ obtenue par completion à partir d'une base $(e_1, e_2, \ldots, e_i)$ de $\operatorname{Ker}(f)$.

D'après le Théorème du rang on a $r = n - i$. Posons donc

$$\tilde{e}_1 = e_{i+1},\ \tilde{e}_2 = e_{i+2}, \ldots\ \tilde{e}_r = e_n \qquad \text{et} \qquad \tilde{e}_{r+1} = e_1,\ \tilde{e}_{r+2} = e_2, \ldots\ \tilde{e}_n = e_i.$$

Posons aussi

$$\tilde{d}_1 = f(e_{i+1}), \quad \tilde{d}_2 = f(e_{i+2}), \quad \ldots \quad \tilde{d}_r = f(e_n)$$

et complétons la base avec $\tilde{d}_{r+1}, \ldots, \tilde{d}_m$. Alors, l'application linéaire f a comme matrice associée dans les deux bases $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \ldots, \tilde{e}_n)$ et $(\tilde{d}_1, \tilde{d}_2, \ldots, \tilde{d}_m)$ exactement la matrice de l'énoncé. ∎

Exemple 2.72 Considérons l'application linéaire $f \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3\right)$ définie dans l'Exemple 2.50. On a vu que sa matrice associée dans les deux bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ est

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Cette application a noyau trivial, donc de dimension 0, et rang 2. En utilisant le Corollaire 2.71 on trouve que, en choisissant comme base de $\mathbb{R}^2$ le couple $\tilde{E} = (\tilde{e}_1, \tilde{e}_2)$ et comme base de $\mathbb{R}^3$ le triplet $\tilde{D} = (\tilde{d}_1, \tilde{d}_2, \tilde{d}_3)$ avec

$$\tilde{e}_1 = (1,0), \quad \tilde{e}_2 = (0,1) \quad \text{et} \quad \tilde{d}_1 = (2,1,0), \quad \tilde{d}_2 = (0,1,3), \quad \tilde{d}_3 = (0,1,0)$$

(le vecteur $\tilde{d}_3$ est un choix possible pour compléter $(\tilde{d}_1, \tilde{d}_2)$ en base de $\mathbb{R}^3$), on trouve comme matrice associée a f

$$A_f^{(\tilde{E},\tilde{D})} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Remarquons aussi que, d'après le Théorème 2.70 cette matrice peut être obtenue comme produit

$$A_f^{(\tilde{E},\tilde{D})} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} A_f \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

où les deux matrices sont les deux matrices de passage des bases canoniques aux bases $\tilde{E}$ et $\tilde{D}$.

Le rang d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ correspond au nombre de vecteurs colonnes linéairement indépendants de A.

Pour toute application $f \in \mathcal{L}(\mathfrak{L}, \mathfrak{M})$, le rang de f coïncide avec le rang de la matrice associée A_f dans deux bases $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ du premier espace et $(d_1, d_2, \ldots, d_m)$ du deuxième espace, c'est-à-dire avec le nombre des vecteurs indépendants parmi $\{f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)\}$.

Remarquons que la définition de rang ne dépend pas des bases choisies. Deux matrices représentant la même application ont le même rang, tandis que l'inverse, en général, n'est pas vrai.

Exemple 2.73 Considérons les deux matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Elles ont rang différent, donc elles ne sont pas des matrices associées à la même application linéaire.

2.4.3 Déterminant et trace d'un endomorphisme

Le corollaire suivant est un cas particulier du Théorème 2.70.

Corollaire 2.74 *Soit $f \in End(\mathfrak{L})$ et A_f une matrice représentant f dans une certaine base. Alors l'ensemble de matrices qui représentent f est exactement*

$$\left\{ \tilde{A} = T^{-1}AT \mid T \text{ est inversible} \right\}.$$

Deux matrices $A, \tilde{A}$ telles qu'il existe une matrice inversible T qui donne $\tilde{A} = T^{-1}AT$ sont dites *conjuguées*.

Exemple 2.75 Considérons l'endomorphisme

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (a,b) & \mapsto & (b-a, 0) \end{array}$$

L'application f est représentée par les deux matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

qui sont conjuguée par la matrice

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

En effet, les deux matrices sont des matrices associée à f, la première dans la base canonique $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ et la deuxième dans la base $\big((1,0),(0,-1)\big)$.

La conjugaison est une relation d'équivalence, c'est-à-dire que pour toutes matrices $A, B, C \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ l'on a (`Exercice`) :

i) $A \sim A$ (*réflexivité*)

ii) $A \sim B \implies B \sim A$ (*symétrie*)

iii) $A \sim B$ et $B \sim C :\Longrightarrow: A \sim C$ (*transitivité*)

De plus, comme le déterminant d'un produit de matrices est égal au produit des déterminants, on a

$$\det(\widetilde{A}) = \det(TAT^{-1}) = \det(T)\det(A)\det(T)^{-1} = \det(A)$$

pour toutes matrices $\widetilde{A} \sim A$.

De ce fait, on peut définir le *déterminant* d'un endomorphisme $f \in \mathrm{End}(\mathfrak{L})$, et on le note par $\det(f)$, comme le déterminant de la matrice A_f associée à f dans n'importe quelle base de $\mathfrak{L}$.

Similairement, comme pour toute couple de matrices carrés $A, B \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ on a

$$\mathrm{trace}(AB) = \mathrm{trace}(BA)$$

on a

$$\mathrm{trace}\left(\widetilde{A}\right) = \mathrm{trace}\left(TAT^{-1}\right) = \mathrm{trace}\left(A(TT^{-1})\right) = \mathrm{trace}(A)$$

pour toutes matrices $\widetilde{A} \sim A$.

Donc, on peut définir la *trace* d'un endomorphisme $f \in \mathrm{End}(\mathfrak{L})$, et on le note par $\mathrm{trace}(f)$, comme la trace de la matrice A_f associée à f dans n'importe quelle base de $\mathfrak{L}$.

Exemple 2.76 Soit $f \in \mathrm{End}\left(\mathbb{R}^2\right)$ l'endomorphisme défini dans l'Exemple 2.75. On a

$$\det(f) = 0 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{trace}(f) = -1.$$

2.4.4 Forme multilinéaires alternées

Soit $\mathfrak{L}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$.

Considérons une application

$$f : \underbrace{\mathfrak{L} \times \mathfrak{L} \times \cdots \times \mathfrak{L}}_{p} \to \mathbb{K}$$

avec $p \geq 1$, telle que, pour tout $i \in \{1, 2 \ldots, p\}$ et pour tous $x_1, x_2, \ldots, x_p$ les applications

$$\begin{array}{rccl} f_{(i)}: & \mathfrak{L} & \to & \mathbb{K} \\ & \ell & \mapsto & f(x_1, \ldots, x_{i-1}, \ell, x_{i+1}, \ldots, x_p) \end{array}$$

soient des formes linéaires. Équivalemment, soit f telle que pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ et pour tous $x_j, \ell, m \in \mathfrak{L}$ avec $i \in \{1, 2, \ldots, p\} \setminus \{i\}$, on a

$$f(x_1, \ldots, \alpha\ell + \beta m, \ldots, x_p) = \alpha f(x_1, \ldots, \ell, \ldots, x_p) + \beta f(x_1, \ldots, m, \ldots, x_p)$$

Une application de telle sorte est dite *forme p-linéaire*. Quand $p = 1$ on retrouve la définition de forme linéaire tandis que cas $p = 2$ sera étudié plus en détail dans un autre chapitre.

Exemple 2.77 L'application trace de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ à $\mathbb{K}$ est une application 1-linéaire pour tout $n \geq 1$ (`Exercice`).

Exemple 2.78 Soit

$$\begin{array}{rccc} f & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (a,b) & \mapsto & ab \end{array}$$

Cette application est un forme 2-linéaire. En effet, pour tout $\alpha, \beta,\ x, y, z \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned} f(\alpha x + \beta y, z) &= (\alpha x + \beta y)\, z \\ &= \alpha(xz) + \beta(yz) \\ &= \alpha f(x,z) + \beta f(y,z) \end{aligned}$$

et symétriquement

$$\begin{aligned} f(x, \alpha y + \beta z) &= x\,(\alpha y + \beta z) \\ &= \alpha(xy) + \beta(xz) \\ &= \alpha f(x,y) + \beta f(x,z) \end{aligned}$$

Une forme p-linéaire f est dite *alternée* si pour tout $i, j \in \{1, 2, \ldots, p\}$ avec $i \neq j$ on a

$$x_i = x_j \text{ avec } i \neq j \quad \Longrightarrow \quad f(x_1, x_2, \ldots, x_p) = 0$$

Proposition 2.79 *Soit $\mathfrak{L}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.*
Soit $f : \mathfrak{L}^p \to \mathbb{K}$ une forme p-linéaire alternée.
Pour tout $i, j \in \{1, 2, \ldots, p\}$ avec $i \neq j$ on a

$$f(x_1, \ldots, \underset{i}{x_i}, \ldots, \underset{j}{x_j}, \ldots, x_p) = -f(x_1, \ldots, \underset{i}{x_j}, \ldots, \underset{j}{x_i}, \ldots, x_p)$$

Preuve. (`Exercice`) ∎

L'espace des matrices carrées $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ de taille $n \times n$ sur un corps $\mathbb{K}$ peut être vu comme produit de n fois l'espace des colonnes $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, c'est-à-dire que

$$\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K}) \quad \simeq \quad \underbrace{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \times \cdots \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}_{n} \quad \simeq \quad (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}))^n$$

On peut donc interpréter la fonction det comme une fonction n-linéaire

$$\begin{array}{rccc} \det : & \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K}) & \to & \mathbb{K} \\ & A & \mapsto & \det(A) \end{array}$$

En effet, pour tout scalaire $\alpha \in \mathbb{K}$ on a

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} + b_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} + b_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & a_{1n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} + b_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & a_{1n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & b_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & a_{1n} \\ a_{n1} & \cdots & b_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

et

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \alpha\, a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & \alpha\, a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & a_{1n} \\ a_{n1} & \cdots & \alpha\, a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \alpha \det\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & a_{1n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Exemple 2.80 Considérons la matrice $\begin{pmatrix} 2+i & 3 \\ i & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{C})$. On a

$$\begin{aligned} \det\begin{pmatrix} 2+i & 3 \\ i & 1 \end{pmatrix} &= \det\begin{pmatrix} 2\cdot 1 + i\cdot 1 & 3 \\ 2\cdot 0 + i \cdot 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 2\det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + i \det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 2\cdot 1 + i\cdot(1-3) = 2-2i \end{aligned}$$

Remarquons aussi que si l'on change la première colonne avec la deuxième on a

$$\det\begin{pmatrix} 3 & 2+i \\ 1 & i \end{pmatrix} = 2i - 2 = -\det\begin{pmatrix} 2+i & 3 \\ i & 1 \end{pmatrix}.$$

2.5 Espace dual

2.5.1 Espace dual et applications linéaires

Soit $\mathfrak{L}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Rappelons que l'espace dual de $\mathfrak{L}$ est l'espace

$$\mathfrak{L}^* = \mathcal{L}(\mathfrak{L}, \mathbb{K}) = \{f : \mathfrak{L} \to \mathbb{K} \mid f \text{ linéaire}\}.$$

D'après la Proposition 2.54 sa dimension est

$$\dim(\mathfrak{L}^*) = \dim(\mathfrak{L}) \cdot \dim(\mathbb{K}) = \dim(\mathfrak{L}).$$

Donc, d'après le Corollaire 2.32 les espaces $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{L}^*$ sont isomorphes. De plus, on peut construire un isomorphisme explicite de la façon suivante.

Considérons une base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de $\mathfrak{L}$. Sa *base duale* est le n-uplet $(e^1, e^2, \ldots, e^n)$ où $e^j : \mathfrak{L} \to \mathbb{K}$ est la fonction qui associe à chaque vecteur de $\mathfrak{L}$ sa j-ème coordonnée dans la base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$, c'est-à-dire que pour tout $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ on a

$$e^j(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n) = x_j$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$.

Donc pour tout $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ on a

$$e^j(e_i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

Proposition 2.81 *Une base dual est une base de l'espace dual $\mathfrak{L}^*$.*

Preuve. Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathfrak{L}$. Considérons sa base duale $(e^1, e^2, \ldots, e^n)$ construite comme ci-dessus.

Le n-uplet $(e^1, e^2, \ldots, e^n)$ engendre l'espace vectoriel $\mathfrak{L}^*$. En effet, pour tout $f \in \mathfrak{L}^*$ et pour tout $\ell = \sum_i \alpha_i e_i \in \mathfrak{L}$, on a

$$f(\ell) = f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f(e_i) = \sum_{i=1}^n e^i(\ell) f(e_i) = \left(\sum_{i=1}^n f(e_i) e^i\right)(\ell)$$

avec $f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n) \in \mathbb{K}$. Donc on peut écrire

$$f = f(e_1)e^1 + f(e_2)e^2 + \cdots + f(e_n)e^n.$$

Cela implique que $\mathfrak{L}^* = \operatorname{span}\left\{e^1, e^2, \ldots, e^n\right\}$.

La famille de vecteurs $\{e^1, e^2, \ldots, e^n\}$ est linéairement indépendante dans $\mathfrak{L}^*$. En effet, si l'on considère des scalaires $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$\alpha_1 e^1 + \alpha_2 e^2 + \cdots + \alpha_n e^n = f_0$$

alors pour tout $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ on a

$$\alpha_j = (\alpha_1 e^1 + \alpha_2 e^2 + \cdots \alpha_n e^n)(e_j) = f_0(e_j) = 0.$$

Donc les vecteurs $e^1, e^2, \ldots, e^n$ sont linéairement indépendants. ∎

Exemple 2.82 Considérons la forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$ définie par

$$\begin{array}{rrcl} f: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ & (a,b,c) & \mapsto & 2a + \sqrt{5}b - c \end{array}$$

L'action de f sur la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ est donnée par

$$f(e_1) = 2, \quad f(e_2) = \sqrt{5} \quad \text{et} \quad f(e_3) = -1$$

La fonction $f \in \mathfrak{L}^*$ peut s'écrire comme combinaison linéaire

$$f = 2e^1 + \sqrt{5}e^2 - e^3$$

où (e^1, e^2, e^3) est la base duale de la base canonique.

Étant donné une base $E = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de $\mathfrak{L}$ on peut donc construire un isomorphisme

$$\begin{array}{rccc} \phi_E: & \mathfrak{L} & \to & \mathfrak{L} \\ & e_i & \mapsto & e^i \end{array}$$

qui est univoquement déterminé d'après le Corollaire 2.25.

Cet isomorphisme n'est pas canonique. En effet, en général il n'existe pas d'isomorphisme canonique entre un espace vectoriel $\mathfrak{L}$ et son dual $\mathfrak{L}^*$.

2.5.2 Espace bidual

Soit $\mathfrak{L}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Son *espace bidual* est l'espace

$$\mathfrak{L}^{**} := (\mathfrak{L}^*)^* = \left\{\widehat{\ell} : \mathfrak{L}^* \to \mathbb{K} \mid \widehat{\ell} \text{ linéaire}\right\}$$

où pour tout $\widehat{\ell} \in \mathfrak{L}^{**}$, pour tous $f, g \in \mathfrak{L}^*$ et tous $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ on pose

$$\widehat{\ell}\,(\alpha f + \beta g) := \alpha\,\widehat{\ell}(f) + \beta\,\widehat{\ell}(g).$$

Remarquons que

$$\dim(\mathfrak{L}^{**}) = \dim(\mathfrak{L}^*) = \dim(\mathfrak{L})$$

et donc que $\mathfrak{L}^{**} \simeq \mathfrak{L}$.

Théorème 2.83 *Soit $\mathfrak{L}$ un espace vectoriel de dimension finie. Il existe un isomorphisme canonique entre $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{L}^{**}$.*

Preuve. Considérons l'application $\phi : \mathfrak{L} \to \mathfrak{L}^{**}$ qui envoie chaque vecteur ℓ dans la forme linéaire

$$\phi(\ell) = \widehat{\ell} : \begin{array}{ccc} \mathfrak{L}^* & \to & \mathbb{K} \\ f & \mapsto & f(\ell) \end{array}$$

c'est-à-dire que pour tout $\ell \in \mathfrak{L}$ et pour tout $f \in \mathfrak{L}^*$ on a

$$\big(\phi(\ell)\big)(f) = f(\ell).$$

On va montrer que l'application ϕ est un isomorphisme d'espace vectoriels.

- L'application $\phi : \mathfrak{L} \to \mathfrak{L}^{**}$ est bien définie, c'est-à-dire que pour tout $\ell \in \mathfrak{L}$, on a $\phi(\ell) \in \mathfrak{L}^{**}$.
  En effet, considérons l'application $\widehat{\ell} = \phi(\ell)$ de $\mathfrak{L}^*$ vers $\mathbb{K}$. Elle est linéaire car pour tous $f, g \in \mathfrak{L}$ et tous $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, on a

$$\begin{aligned} \widehat{\ell}\,(\alpha f + \beta g) &= (\alpha f + \beta g)(\ell) \\ &= \alpha f(\ell) + \beta g(\ell) \\ &= \alpha\hat{\ell}(f) + \beta\widehat{\ell}(g) \end{aligned}$$

  Donc $\hat{\ell}$ est dans $\mathfrak{L}^{**}$.
- L'application $\phi : \mathfrak{L} \to \mathfrak{L}^{**}$ est linéaire.
  En effet, pour tous $\ell, m \in \mathfrak{L}$ et tous $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, l'application $\widehat{\alpha\ell + \beta m} = \phi(\alpha\ell + \beta m)$ de $\mathfrak{L}^*$ vers $\mathbb{K}$ est telle que pour tous $f \in \mathfrak{L}^*$ on a

$$\begin{aligned} (\widehat{\alpha\ell + \beta m})(f) &= f(\alpha\ell + \beta m) \\ &= \alpha f(\ell) + \beta f(m) \\ &= \alpha\,\widehat{\ell}(f) + \beta\,\widehat{m}(f) \\ &= \big(\alpha\,\widehat{\ell} + \beta\,\widehat{m}\big)(f) \end{aligned}$$

  d'où on obtient $\phi(\alpha\ell + \beta m) = \alpha\phi(\ell) + \beta\phi(m)$.

- L'application $\phi : \mathfrak{L} \to \mathfrak{L}^{**}$ est bijective
  En effet, supposons que $\phi(\ell) = 0_{\mathfrak{L}^{**}}$. Alors, pour tout $f \in \mathfrak{L}^*$ on a

  $$f(\ell) = \phi(\ell)(f) = 0_{\mathfrak{L}^{**}}(f) = 0$$

  et donc, en particulier, $\ell = \mathrm{id}(\ell) = 0$. Cela implique que $\mathrm{Ker}\,(\phi) = \{0_{\mathfrak{L}^{**}}\}$ et donc que ϕ est injective. Comme $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{L}^{**}$ sont deux espaces de la même dimension finie, on a que ϕ est une application bijective.

De plus, l'isomorphisme ϕ que l'on vient de considérer ne dépend pas du choix des bases. Il est donc un isomorphisme canonique. ■

Exemple 2.84 Considérons l'espace bidual $\left(\mathbb{R}^3\right)^{**}$. D'après le Théorème précédent on a la bijection

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longleftrightarrow & \left(\mathbb{R}^3\right)^{**} \\ (a,b,c) & \longleftrightarrow & \widehat{(a,b,c)} \end{array}$$

Soit $f \in \mathfrak{L}^*$ comme dans l'Exemple 2.82. Alors

$$\widehat{(a,b,c)}(f) = f(a,b,c) = 2a + \sqrt{5}b - c$$

Chapitre 3

Réduction des endomorphismes

Dans le chapitre précédent on a vu que toute application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathfrak{L}, \mathfrak{M})$, avec $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, peut s'exprimer, dans des bases opportunes, dans une forme "simple". En particulier, on peut traduire le Corollaire 2.71 en terme de matrices.

Corollaire 3.1 *Pour toute matrice $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ il existe deux matrices inversibles $P \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ et $T \in \mathcal{M}_{m,m}(\mathbb{K})$ telles que*

$$T^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Dans ce chapitre on s'occupe de trouver une représentation simple d'un endomorphisme, et pour faire cela on utilisera des résultats sur les matrices carrées. En particulier, étant donné un endomorphisme f et sa matrice associée A_f dans une certaine base, on va trouver des conditions sur f (et sur A_f) qui nous permettent de trouver une matrice conjuguée à A_f ayant une forme "simple".

3.1 Valeurs propres et vecteurs propres

3.1.1 Définitions

Soit $f \in \operatorname{End}(\mathfrak{L})$ avec $\mathfrak{L}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Supposons qu'il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ et un vecteur non nul $\ell \in \mathfrak{L} \setminus \{\vec{0}_{\mathfrak{L}}\}$ tels

que
$$f(\ell) = \lambda\ell.$$
Sous ces conditions on dira que λ est une *valeur propre* de f et que ℓ est un *vecteur propre* pour la valeur propre λ.

Exemple 3.2 La seule valeur propre de l'endomorphisme identité $\mathrm{id}_{\mathfrak{L}}$ est 1.

En général, pour toute homothétie $f_\lambda = \lambda\mathrm{id}$ de rapport λ la seule valeur propre est le scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$.

Remarquons que tous vecteurs non nuls de $\mathfrak{L}$ sont des vecteurs propres d'une homothétie.

Exemple 3.3 Soit $f \in \mathrm{End}\,(\mathfrak{L})$ et $\ell \in \mathrm{Ker}\,(f) \setminus \{\vec{0}\}$. Alors ℓ est un vecteur propre de f pour la valeur propre 0.

Remarquons que si ℓ est un vecteur propre de f, alors la valeur propre associée à ℓ est unique. En effet, si $f(\ell) = \lambda\ell = \mu\ell$, alors on a $(\lambda - \mu)\ell = \vec{0}$. Or, $\ell \neq \vec{0}$, donc forcement on trouve $\lambda = \mu$.

Proposition 3.4 *Soit $f \in End\,(\mathfrak{L})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Le scalaire λ est une valeur propre de f si et seulement si l'endomorphisme $f - \lambda\mathrm{id}_{\mathfrak{L}}$ n'est pas bijectif.*

Preuve. D'après le Théorème 2.45, un endomorphisme est bijectif si et seulement si il est injectif et, d'après la Proposition 2.41, cela est vérifié si et seulement si $\mathrm{Ker}\,(f - \lambda\mathrm{id}_{\mathfrak{L}}) = \{\vec{0}_{\mathfrak{L}}\}$.

Or, λ est une valeur propre de f si et seulement s'il existe un vecteur $\ell \neq \vec{0}$ tel que
$$f(\ell) = \lambda\ell \quad\Longleftrightarrow\quad (f - \lambda\mathrm{id}_{\mathfrak{L}})\,(\ell) = \vec{0} \quad\Longleftrightarrow\quad \ell \in \mathrm{Ker}\,(f - \lambda\mathrm{id}_{\mathfrak{L}})\,.$$
■

Exemple 3.5 Considérons l'endomorphisme
$$\begin{array}{rrcl} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (a,b) & \mapsto & (b,4a) \end{array}$$
D'après la Proposition précédente, λ est une valeur propre de f si et seulement s'il existe un vecteur $(a,b) \in \mathrm{Ker}\,(f - \lambda\mathrm{id}) \setminus \{(0,0)\}$, c'est-à-dire tel que
$$(b - \lambda a, 4a - \lambda b) = (0,0) \quad\Longleftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{rcl} 4a & = & \lambda^2 a \\ b & = & \lambda a \end{array}\right.$$
Les seuls valeurs propres de f sont donc 2 et -2. Les vecteurs propres de f par la valeur propre 2 sont de la forme $(a, 2a)$, tandis que les vecteurs propres de f par la valeur propre -2 sont de la forme $(a, -2a)$.

En effet, pour tout $a \in \mathbb{R}$ on a
$$f(a,2a) = (2a,4a) = 2(a,2a) \quad \text{et} \quad f(a,-2a) = (-2a,4a) = -2(a,2a).$$

3.1.2 Polynôme caractéristique

Rappelons que le polynôme caractéristique $p_A \in \mathbb{K}[x]$ d'une matrice carré $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ est le polynôme défini par

$$p_A = \det(A - xI_{n\times n}).$$

Ce polynôme a degré exactement n et peut être écrit comme

$$p_A = (-1)^n x^n + (-1)^{n-1}(\mathrm{trace}\,(A))x^{n-1} + \cdots + \det(A).$$

Soit $f \in \mathrm{End}\,(\mathfrak{L})$, avec $\mathfrak{L}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Le *polynôme caractéristique* de f, noté p_f, est le polynôme caractéristique d'une matrice associée à f dans une base choisie, c'est-à-dire le polynôme

$$p_f(x) = \det(A_f - xI_{n\times n}) \in \mathbb{K}[x]$$

Remarquons que cette définition ne dépend pas du choix de la base dans laquelle on représente f. En effet, si A et B représentent toutes les deux l'endomorphisme f alors on a, d'après le Corollaire 2.74, $B = P^{-1}AP$ pour une certaine matrice inversible P, et donc

$$\begin{aligned}
\det(B - xI_{n\times n}) &= \det(P^{-1}AP \;-\; xP^{-1}I_{n\times n}P)\\
&= \det(P^{-1}(A - xI_{n\times n})P)\\
&= \det(P)^{-1}\det(A - xI_{n\times n})\det(P)\\
&= \det(A - xI_{n\times n}).
\end{aligned}$$

Exemple 3.6 Considérons l'endomorphisme f défini dans l'Exemple 3.5. La matrice associée à f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est

$$A_f = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Son polynôme caractéristique est donc

$$\begin{aligned}
p_f &= \det(A_f - xI_{n\times n})\\
&= \det\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} - x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\\
&= \det\begin{pmatrix} -x & 1 \\ 4 & -x \end{pmatrix} = x^2 - 4.
\end{aligned}$$

En évaluant le polynôme on trouve que pour tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ on a $p_f(\lambda) = \det(f - \lambda\mathrm{id}_{\mathfrak{L}})$. On a donc le résultat suivant.

Proposition 3.7 *Soit $f \in End(\mathfrak{L})$. Le scalaire λ est une valeur propre de f si et seulement si λ est une racine de p_f.*

Preuve. D'après la Proposition 3.4, un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ et une valeur propre de f si et seulement si l'endomorphisme $f - \lambda \mathrm{id}_{\mathfrak{L}}$ n'est pas bijective, ce qui est équivalent à dire que $\det(f - \lambda \mathrm{id}_{\mathfrak{L}}) = 0$.

Donc λ est un vecteur propre de f si et seulement si λ est une racine du polynôme caractéristique. ∎

Calculer les valeur propres d'un endomorphisme n'est pas toujours facile, mais en utilisant la caractérisation de la Proposition précédente, on a le résultat suivant.

Proposition 3.8 *Soit $f \in End(\mathfrak{L})$. Si la matrice A_f associée à f dans une certaine base est triangulaire supérieure ou triangulaire inférieure, alors les valeurs propres de f sont exactement les coefficients diagonaux de A_f.*

Preuve. (`Exercice`) ∎

Exemple 3.9 Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{Q}^3$ ayant comme matrice associée dans une certaine base la matrice

$$A_g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de g sont 1 et 3. Les vecteurs propres pour la valeur 1 sont tous les vecteurs de la forme $(x, y, 0) \in \mathbb{Q}^3$, tandis que les vecteurs propres pour la valeur 3 sont les vecteurs de la forme $(-2y, y, -2y) \in \mathbb{Q}^3$.

Comme toute valeur propre λ est racine de du polynôme caractéristique, alors le polynôme $(\lambda - x)$ divise p_f. On appelle *multiplicité* de la valeur propre λ, et on le note $m(\lambda)$, le plus grand entier m tel que $(\lambda - x)^m$ divise p_f.

Exemple 3.10 Soit g comme dans l'Exemple 3.9. Le polynôme caractéristique de g est $p_g = (1 - x)^2(3 - x)$.

Les multiplicités des deux valeurs propres sont $m(1) = 2$ et $m(3) = 1$.

Soit $f \in \mathfrak{L}$ avec $\mathfrak{L}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. On appelle *spectre* de f l'ensemble $\mathrm{Spect}\,(f)$ de toutes ses valeurs propres.

Exemple 3.11 Soit g l'endomorphisme défini dans l'Exemple 3.9. Le spectre de g est l'ensemble $\mathrm{Spect}\,(g) = \{1, 3\}$.

On dit que f a un spectre *simple* si toutes les valeurs propres de f ont multiplicité 1.

Exemple 3.12 L'endomorphisme f défini dans l'Exemple 3.5 a un spectre simple car $\mathrm{Spect}\,(f) = \{2, -2\}$ et $m(2) = m(-2) = 1$, tandis que le spectre de l'endomorphisme g défini dans l'Exemple 3.9 n'est pas simple, car la multiplicité de valeur propre 1 est $m(1) = 2$.

3.1.3 Espace des vecteurs propres

Soit $f \in \mathrm{End}\,(\mathfrak{L})$ avec $\mathfrak{L}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Dans la Proposition 3.4 on a montré qu'un vecteur $\ell \in \mathfrak{L}$ est un vecteur propre de f si et seulement s'il appartient à $\mathrm{Ker}\,(f - \lambda \mathrm{id}_{\mathfrak{L}})$ pour une certain valeur propre λ.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ (pas forcement une valeur propre) on pose

$$\mathfrak{L}(\lambda) := \mathrm{Ker}\,(f - \lambda \mathrm{id})\,.$$

De façon équivalente, $\mathfrak{L}(\lambda)$ est l'ensemble de tous les vecteurs $\ell \in \mathfrak{L}$ tels que $f(\ell) = \lambda\ell$.

Proposition 3.13 *Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\mathfrak{L}(\lambda)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{L}$. De plus, il est stable par f, dans le sens que pour tout $\ell \in \mathfrak{L}(\lambda)$ on a $f(\ell) \in \mathfrak{L}(\lambda)$.*

Preuve. L'ensemble $\mathfrak{L}(\lambda) = \mathrm{Ker}\,(f - \lambda \mathrm{id})$ est clairement un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{L}$ en tant que noyau d'un endomorphisme de $\mathfrak{L}$. Une façon plus directe de montrer le même résultat est de vérifier que :

— $\mathfrak{L}(\lambda) \neq \emptyset$, puisque $f(\vec{0}) = \vec{0} = \lambda\vec{0}$ et donc $\vec{0} \in \mathfrak{L}\lambda$,

— pour tous $\ell, m \in \mathfrak{L}(\lambda)$ on a

$$f(\ell + m) = f(\ell) + f(m) = \lambda\ell + \lambda m = \lambda(\ell + m)$$

et donc $\ell + m \in \mathfrak{L}(\lambda)$,

— pour tout $\ell \in \mathfrak{L}(\lambda)$ et $\alpha \in \mathbb{K}$ on a

$$f(\alpha\ell) = \alpha f(\ell) = \alpha(\lambda\ell) = \lambda(\alpha\ell)$$

et donc $\alpha\ell \in \mathfrak{L}(\lambda)$.

De plus, $\mathfrak{L}(\lambda)$ est stable par l'endomorphisme f, car pour tout $\ell \in \mathfrak{L}(\lambda)$ on a

$$f\big(f(\ell)\big) = f(\lambda\ell) = \lambda f(\ell)$$

et donc $f(\ell) \in \mathfrak{L}(\lambda)$. ■

Quand λ est une valeur propre de f on appelle l'espace $\mathfrak{L}(\lambda)$ le *sous-espace propre* de $\mathfrak{L}$ (par rapport à f) pour la valeur propre λ. Remarquons que le sous-espace propre $\mathfrak{L}(\lambda)$ contient tous les vecteurs propres pour la valeur propre λ.

Exemple 3.14 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini dans l'Exemple 3.5. Les sous-espaces propres de $\mathfrak{L}$ sont

$$\mathbb{R}^2(2) = \{(a, 2a) \mid a \in \mathbb{R}\} \quad \text{et} \quad \mathbb{R}^2(-2) = \{(a, -2a) \mid a \in \mathbb{R}\}.$$

Notons que $\mathbb{R}^2(\alpha) = \{(0,0)\}$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$.

Dans le premier chapitre on a introduit la notation $\mathfrak{M} \oplus \mathfrak{N}$ pour deux sous-espaces $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ d'un espace vectoriel $\mathfrak{L}$ tels que chaque vecteur $\ell \in \mathfrak{L}$ peut s'écrire de façon unique comme somme $\ell = m + n$ d'un vecteur $m \in \mathfrak{M}$ et d'un vecteur $n \in \mathfrak{N}$. Dans la suite utilisera la même notation $\mathfrak{M} \oplus \mathfrak{N}$ si chaque vecteur de l'espace vectoriel $\mathfrak{M} + \mathfrak{N} = \{m + n \mid m \in \mathfrak{M}, n \in \mathfrak{N}\}$ s'écrit de façon unique en somme d'un élément de $\mathfrak{M}$ et d'un élément de $\mathfrak{N}$.

En général, on dira que l'espace $\mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_2 + \cdots + \mathfrak{L}_r$ est une *somme directe* des espaces vectoriels $\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2, , \ldots, \mathfrak{L}_r$, et on le notera par $\mathfrak{L}_1 \oplus \mathfrak{L}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{L}_\mathfrak{r}$, si chaque élément ℓ de cet espace s'écrit de façon unique comme $\ell = \ell_1 + \ell_2 + \cdots + \ell_r$ avec $\ell_i \in \mathfrak{L}_i$ pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$.

Proposition 3.15 *Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ les valeurs propres distincts de f. Alors la somme des sous-espaces propres*

$$\mathfrak{L}(\lambda_1) \oplus \mathfrak{L}(\lambda_2) \oplus \cdots \oplus \mathfrak{L}(\lambda_r)$$

est directe.

Preuve. On peut raisonner par récurrence sur r. Si $r = 1$ alors le résultat est vrai. Supposons maintenant que les sous-espaces $\mathfrak{L}(\lambda_1), \mathfrak{L}(\lambda_2), \ldots, \mathfrak{L}(\lambda_p)$ soient en somme directe pour $p < r$ et montrons que

$$\big(\mathfrak{L}(\lambda_1) \oplus \mathfrak{L}(\lambda_2) \oplus \cdots \oplus \mathfrak{L}(\lambda_p)\big) \cap \mathfrak{L}(\lambda_{p+1}) = \{\vec{0}\}.$$

Cela montrera que les sous-espaces propres de $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p, \lambda_{p+1}$ sont en somme directe.

Soit donc $\ell \in (\mathfrak{L}(\lambda_1) \oplus \mathfrak{L}(\lambda_2) \oplus \cdots \oplus \mathfrak{L}(\lambda_p)) \cap \mathfrak{L}(\lambda_{p+1})$. Alors, ils existent $\ell_i \in \mathfrak{L}(\lambda_i)$ avec $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$ tels que $\ell = \ell_1 + \ell_2 + \cdots + \ell_p$. Donc,

$$\begin{aligned} \lambda_{p+1}(\ell_1 + \ell_2 + \cdots + \ell_p) &= \lambda_{p+1}\ell = f(\ell) \\ &= f(\ell_1 + \ell_2 + \cdots + \ell_p) \\ &= f(\ell_1) + f(\ell_2) + \cdots + f(\ell_p) \\ &= \lambda_1\ell_1 + \lambda_2\ell_2 + \cdots + \lambda_p\ell_p \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$(\lambda_1 - \lambda_{p+1})\ell_1 + (\lambda_2 - \lambda_{p+1})\ell_2 + \cdots + (\lambda_p - \lambda_{p+1})\ell_p = \vec{0}.$$

Comme la somme $\mathfrak{L}(\lambda_1) \oplus \mathfrak{L}(\lambda_2) \oplus \cdots \oplus \mathfrak{L}(\lambda_p)$ est directe et $\lambda_i - \lambda_{p+1} \neq 0$ pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$ on a forcement $\ell_1 = \ell_2 = \ldots = \ell_p = \vec{0}$, d'où $\ell = \vec{0}$. ∎

Exemple 3.16 Soit f comme dans l'Exemple 3.5. Alors les deux sous-espaces propres $\mathbb{R}^2(2)$ et $\mathbb{R}^2(-2)$ de $\mathbb{R}^2$ sont en somme directe.

Exemple 3.17 Soit g comme dans l'Exemple 3.9. Alors les deux sous-espaces propres $\mathbb{Q}^3(1)$ et $\mathbb{Q}^3(3)$ de $\mathbb{Q}^3$ sont en somme directe.

Théorème 3.18 *Soit $f \in End(\mathfrak{L})$ avec $\mathfrak{L}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et soit λ une valeur propre de f. Alors on a $1 \leq \dim \mathfrak{L}(\lambda) \leq m(\lambda)$.*

Preuve. L'espace vectoriel $\mathfrak{L}(\lambda)$ différent de $\{\vec{0}\}$ si et seulement si λ est une valeur propre. Donc $\dim \mathfrak{L}(\lambda) \geq 1$ pour toute valeur propre de f. Posons $m = m(\lambda)$. Si $m = \dim \mathfrak{L}$ l'énoncé est vrai car $f = \lambda \mathrm{id}$ est une homothétie. Supposons donc que $m < \dim(\mathfrak{L})$.

Supposons par l'absurde que $\dim \mathfrak{L}(\lambda) \geq m+1$. Alors ils existent des vecteurs $e_1, e_2, \ldots, e_{m+1}$ linéairement indépendants que l'on peut compléter en une base E de $\mathfrak{L}$. La matrice associée à f dans cette base E sera donc de la forme

$$A_f = \begin{pmatrix} \lambda I_{(m+1)\times(m+1)} & B \\ O_{k\times k} & C \end{pmatrix}$$

avec $k = \dim \mathfrak{L} - (m+1)$ et B, C des matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$ de taille opportune.

Donc p_f sera de la forme

$$\begin{aligned} p_f &= \det\left((\lambda - x) I_{(m+1)\times(m+1)}\right) \det(B - xI_{k\times k}) \\ &= (\lambda - x)^{m+1} \det(B - xI_{k\times k}) \end{aligned}$$

ce qui est impossible car m est la plus grande puissance de $(\lambda - x)$ qui divise p_f. ∎

Exemple 3.19 Soit g comme dans l'Exemple 3.9. On a

$$\dim \mathbb{Q}^3(1) = \dim \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{Q}\} = 2 \leq 2 = m(1)$$

et

$$\dim \mathbb{Q}^3(3) = \dim \{(-2z, z, -2z) \mid z \in \mathbb{Q}\} = 1 \leq 1 = m(3).$$

Exemple 3.20 Soit h l'endomorphisme de $\mathbb{C}^2$ représenté par la matrice

$$A_h = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de h est $p_h = (x-1)^2$ et sa seule valeur propre est 1 de multiplicité $m(1) = 2$. L'espace propre $\mathbb{C}^2(1) = \{(z, 0) \mid z \in \mathbb{C}\}$ a dimension

$$\dim \mathbb{C}^2(1) = 1 < 2 = m(1).$$

3.2 Diagonalisation et triangularisation

3.2.1 Endomorphismes diagonalisables

Rappelons qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ est dite *diagonalisable* s'il existe une matrice inversible T telle que $T^{-1}AT$ est une matrice diagonale.

Un endomorphisme $f \in \mathrm{End}\,(\mathfrak{L})$, avec $\mathfrak{L}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, est dit *diagonalisable* s'il existe une base $E = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de $\mathfrak{L}$ telle que la matrice associé à f dans la base E soit diagonale, c'est-à-dire de la forme

$$A_f = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

pour certains $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$.

Donc un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si sa matrice associée dans n'importe quelle base est diagonalisable.

Proposition 3.21 *Un endomorphisme $f \in End(\mathfrak{L})$ est diagonalisable si et seulement s'il existe une base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de $\mathfrak{L}$ telle que les vecteurs e_i est un vecteur propre de f pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.*

Preuve. Pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable il faut et il suffit qu'ils existent des scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ tels que pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ on ait $f(e_i) = \lambda_i e_i$ pour une certaine base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$. ∎

Remarquons que, d'après la Proposition 3.8, les valeurs propres d'un endomorphisme diagonalisable sont exactement les coefficients diagonaux qui apparaissent dans la matrice diagonale associée à l'endomorphisme dans une base opportune. Une preuve directe de ce résultat est donnée dans la proposition suivante.

Proposition 3.22 *Si f est un endomorphisme diagonalisable avec matrice diagonale associée $A_f = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, alors $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sont exactement les valeurs propres de f.*

Preuve. Comme le polynôme caractéristique p_f ne dépend pas du choix de la matrice associée à f, alors les valeurs propres de f sont les racines du polynôme

$$\det\,(A - xI_{n\times n}) = (\lambda_1 - x)(\lambda_2 - x)\cdots(\lambda_n - x)$$

c'est-à-dire $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. ∎

Exemple 3.23 Toute homothétie sur un espace vectoriel $\mathfrak{L}$ de dimension finie est diagonalisable. En effet, la matrice associée à une homothétie de rapport α sera de la forme $\alpha I_{n\times n}$ avec $n = \dim\,(\mathfrak{L})$.

Exemple 3.24 Soit f l'endomorphisme défini dans l'Exemple 3.5. La paire $\big((1,2),(1,-2)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Les deux vecteurs de cette base sont des vecteurs propres de f, car

$$f(1,2) = (2,4) = 2\cdot(1,2) \quad \text{et} \quad f(1,-2) = (-2,4) = -2\cdot(1,-2).$$

Donc f est diagonalisable. La matrice associée à f dans cette nouvelle base est

$$A'_f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \operatorname{diag}(2, -2).$$

Exemple 3.25 Soit h l'endomorphisme défini dans l'Exemple 3.20, c'est-à-dire l'endomorphisme ayant comme matrice associée par rapport à la base canonique de $\mathbb{C}^2$ est

$$A_h = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cet endomorphisme n'est pas diagonalisable. En effet, si on suppose par l'absurde qu'il le soit, alors d'après la Proposition précédente, la matrice T devrait être conjugué à la matrice diagonale ayant comme coefficients diagonaux les valeurs propres de h, c'est-à-dire 1 (avec multiplicité 2). Or, s'il existe une matrice inversible T telle que

$$T^{-1} A_h T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

alors on trouve

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Proposition 3.26 *Soit $f \in End(\mathfrak{L})$ avec $\mathfrak{L}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Si Spect(f) est simple, alors f est diagonalisable.*

Preuve. Si le spectre de f est simple, alors l'endomorphisme a n valeurs propres distincts $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Soient $e_1, e_2, \ldots, e_n$ les vecteurs propres de f pour les valeurs $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ respectivement. Montrons que $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base. Cela impliquera que la matrice associée à f dans cette base est diagonale.

Montrons par récurrence sur k, avec $1 \leq k \leq n$, que les vecteurs $e_1, e_2, \ldots, e_k$ sont linéairement indépendants. Cela est vrai quand $k = 1$, car tout vecteur non nul est linéairement indépendant. Supposons donc que $e_1, e_2, \ldots, e_{k-1}$, avec $1 \leq k \leq n$ soient linéairement indépendants. Si $e_1, e_2, \ldots, e_{k-1}, e_k$ ne sont pas linéairement indépendants, alors on peut exprimer e_k comme combinaison linéaire des autres, c'est-à-dire qu'ils existent $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k-1}$ tels que

$$e_k = \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i e_i.$$

Si on multiplie les deux membres par λ_k on obtient donc

$$\lambda_k e_k = \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_k \alpha_i e_i.$$

Or, comme les vecteurs $e_1, e_2, \ldots, e_{k-1}, e_k$ sont les vecteurs propres pour les valeurs $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{k-1}, \lambda_k$, en appliquant f on trouve

$$\lambda_k e_k = f(e_k) = f\left(\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i \lambda_i e_i.$$

Donc,

$$\sum_{i=1}^{k-1} \lambda_k \alpha_i e_i = \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i \alpha_i e_i \quad \Longrightarrow \quad \sum_{i=1}^{k-1} (\lambda_k - \lambda_i) \alpha_i e_i = \vec{0}$$

mais cela donne une contradiction car $\lambda_k \neq \lambda_i$ pour tout $i \neq k$ est $e_1, e_2, \ldots, e_{k-1}$ sont linéairement indépendants.

Donc $e_1, e_2, \ldots, e_n$ sont linéairement indépendants. Or, n vecteurs linéairement indépendants dans un espace de dimension n forment une base, d'où le résultat. ■

Remarquons que la Proposition 3.26 affirme que l'avoir un spectre simple est une condition suffisante mais pas nécessaire pour que l'endomorphisme soit diagonalisable.

Exemple 3.27 Soit g l'endomorphisme défini dans l'Exemple 3.9. L'endomorphisme est diagonalisable même si son spectre n'est pas simple. En effet, la matrice associée à g dans la base $\big((1,0,0),(0,1,0),(-2,1,-2)\big)$ de $\mathbb{Q}^3$ est

$$A'_g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Rappelons qu'un polynôme $P \in \mathbb{K}[x]$ est dit *scindé* sur $\mathbb{K}$ (ou qu'il *a toutes ses racines dans* $\mathbb{K}$) s'il s'écrit comme produit de polynômes de premier degré dans $\mathbb{K}[x]$.

Exemple 3.28 Le polynôme x^2+1 est scindé sur $\mathbb{C}$, car $x^2+1 = (x-i)(x+i)$ mais il ne n'est pas sur $\mathbb{R}$.

Les deux résultats suivants sont très importants, mais on les donne sans preuve.

Théorème 3.29 *Soit $f \in End(\mathfrak{L})$ avec $\mathfrak{L}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. L'endomorphisme f est diagonalisable si et seulement si*

a) p_f est scindé dans $\mathbb{K}$ et

b) pour chaque valeur propre λ de f on a $\dim \mathfrak{L}(\lambda) = m(\lambda)$.

Exemple 3.30 Soit h l'endomorphisme non diagonalisable de l'Exemple 3.25.

Le polynôme caractéristique de h est scindé sur $\mathbb{C}$ car $(1-x)^2 = (1-x)(1-x)$ mais $m(1) \neq \dim \mathbb{C}^2(1)$.

Corollaire 3.31 *Soit f un endomorphisme qui possède au moins une valeur propre. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ les valeurs propres distinctes de f.*

Alors f est diagonalisable si et seulement si $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}(\lambda_1) \oplus \mathfrak{L}(\lambda_2) \oplus \cdots \oplus \mathfrak{L}(\lambda_r)$.

Exemple 3.32 Soit f comme dans l'Exemple 3.5. Les sous-espaces propres sont donnés dans l'Exemple 3.14 et on vérifie facilement que

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2(2) \oplus \mathbb{R}^2(-2).$$

Exemple 3.33 Soit g comme dans l'Exemple 3.9. On vérifie que l'on peut-êcrire $\mathbb{Q}^3 = \mathbb{Q}^3(1) \oplus \mathbb{Q}^3(3)$.

3.2.2 Puissance d'une matrice

Rappelons que pour toute matrice diagonale $D = \operatorname{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, la puissance k-ème de D, pour tout $k \geq 0$, est la matrice diagonale ou chaque coefficient est élevé à la puissance k-ème, c'est-à-dire

$$D^k = \operatorname{diag}\left(\alpha_1^k, \alpha_2^k, \ldots, \alpha_n^k\right).$$

Exemple 3.34

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} (-2)^3 & 0 \\ 0 & 5^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 125 \end{pmatrix}.$$

Proposition 3.35 *Soit A une matrice diagonalisable et soient P une matrice inversible et D une matrice diagonale telles que $A = P^{-1}DP$. Alors pour tout $k \geq 0$*

$$A^k = P^{-1}D^kP.$$

Preuve. On raisonne par récurrence sur k.

La formule est vraie pour $k = 0$ car

$$A^0 = I = P^{-1}IP = P^{-1}D^0P.$$

Supposons maintenant la formule est vraie pour k. Alors

$$\begin{aligned} A^{k+1} &= A\,A^k = \left(P^{-1}DP\right)\left(P^{-1}D^kP\right) \\ &= P^{-1}D\left(PP^{-1}\right)D^kP \\ &= P^{-1}\,DD^k\,P \\ &= P^{-1}D^{k+1}P. \end{aligned}$$

■

Exemple 3.36 Soit f l'endomorphisme défini dans l'Exemple 3.5. Dans l'Exemple 3.24 on a vu que la matrice A_f associée à f dans la base canonique est conjuguée à la matrice diagonale $A'_f = \operatorname{diag}(2, -2)$. En effet on a $A'_f = P^{-1}A_fP$ avec

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Donc la matrice associée à f^7 sera la matrice $A_{f^7} = (A_f)^7$

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}^7 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}^7 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^7 & 0 \\ 0 & -2^7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^{-1} & 2^{-2} \\ 2^{-1} & -2^{-2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 2^6 \\ 2^8 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 64 \\ 256 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

3.2.3 Suites récurrentes linéaires

Dans le premier chapitre on a introduit l'espace vectoriel $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ des suites numériques à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Considérons deux scalaires $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ et une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telle que

$$u_{n+2} = \alpha u_n + \beta u_{n+1} \qquad \text{pour tout } n \geq 1$$

avec u_1 et u_2 connus.

Calculer la valeur de u_n pour un n quelconque en utilisant la définition récursive est en général long et difficile. Une solution alternative consiste à traduire cette récurrence linéaire en terme de matrices. En effet, on peut exprimer la récurrence ci-dessus comme

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \cdots = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

Si la matrice trouvé est diagonalisable, le calcul de sa puissance n-ème sera (relativement) facile et donc on aura trouvé une manière simple de calculer la valeur u_n sans devoir connaître toutes les valeurs u_m avec $1 \leq m \leq n-1$.

Exemple 3.37 Considérons la récurrence linéaire $v_{n+2} = 4v_n$ pour tout $n \geq 1$, avec $v_1 = 1$ et $v_2 = -1$. On a donc

$$\begin{pmatrix} v_{n+1} \\ v_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

En faisant les calculs on trouve que pour tout $m \geq 1$ on a $v_{2m-1} = 4^{m-1}$ et $v_{2m} = -4^{m-1}$, c'est-à-dire que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite numérique

$$(1, -1, 4, -4, 16, -16, \ldots, 4^{m-1}, -4^{m+1}, \ldots).$$

En généralisant, on peut considérer une suite récurrente linéaire $(u_n)_n$ d'ordre k de la forme

$$u_{n+k} = \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i u_{n+i} \qquad \text{avec } u_1, u_2, \ldots, u_k \text{ connus}$$

et, une fois récrite cette égalité sous forme matricielle, se ramener au calcul d'une puissance de matrice d'ordre k.

3.2.4 Endomorphismes triangularisables

Rappelons qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ est dite *triangularisable* s'il existe une matrice inversible T telle que $T^{-1}AT$ est une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure).

Un endomorphisme $f \in \mathrm{End}(\mathfrak{L})$, avec $\mathfrak{L}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, est dit *triangularisable* s'il existe une base $E = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de $\mathfrak{L}$ telle que la matrice associé à f dans la base E soit triangulaire (supérieure ou inférieure), c'est-à-dire de la forme

$$A_f = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ 0 & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad A_f = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

pour certains $\alpha_{ij} \in \mathbb{K}$.

Donc un endomorphisme est triangularisable si et seulement si sa matrice associée dans n'importe quelle base est triangularisable.

Remarquons que si l'endomorphisme f est représenté par une matrice triangulaire inférieure dans la base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$, alors il sera représenté par une matrice triangulaire supérieure dans la base $(e_n, e_{n-1}, \ldots, e_1)$.

La proposition suivant suivi directement de la Proposition 3.8.

Proposition 3.38 *Si f est un endomorphisme triangularisable avec matrice triangulaire associée A_f, alors les valeurs propres de f sont exactement les coefficients diagonaux de A_f.*

Exemple 3.39 Tout endomorphisme diagonalisable est triangularisable.

Exemple 3.40 L'endomorphisme h défini dans l'Exemple 3.20 est triangularisable. En effet, la matrice A_h définie dans le même exemple est une matrice triangulaire.

Théorème 3.41 *Soit $f \in End(\mathfrak{L})$ avec $\mathfrak{L}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. L'endomorphisme f est triangularisable si et seulement si son polynôme caractéristique p_f est scindé dans $\mathbb{K}$.*

Preuve. Posons $n = \dim \mathfrak{L}$.

Si f est triangularisable alors, d'après la Proposition 3.38, les valeurs propres sont les coefficients diagonaux $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ de la matrice A_f associée dans une certaine base.. Or, ces coefficients sont aussi les racines du polynôme caractéristique de $p_f = \det(A_f - xI_{n\times n}) = (\lambda_1 - x)(\lambda_2 - x)\cdots(\lambda_n - x)$.

Réciproquement, supposons que p_f ait toutes racines dans $\mathbb{K}$ et montrons par récurrence sur n que l'endomorphisme est triangularisable.

Si $n = 1$ alors f est une homothétie et donc il est bien triangularisable.

Supposons que tout endomorphisme dans un espace de taille n ayant polynôme caractéristique scindé soit triangularisable.

Comme p_f est scindé, il existe au moins une racine $\lambda \in \mathbb{K}$ de p_f. Donc λ est une valeur propre de f. Soit e_1 un vecteur propre pour la valeur propre λ. On complète e_1 en une base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de $\mathfrak{L}$ et on considère la matrice associée à f dans cette nouvelle base. Celle-ci sera de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda & B \\ O_{(n-1)\times 1} & C \end{pmatrix}$$

avec $B \in \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{K})$ un vecteur ligne et $C \in \mathcal{M}_{n-1,n-1}(\mathbb{K})$ une matrice carrée de taille $(n-1) \times (n-1)$. Or, $p_f = (\lambda - x)\det\left(C - xI_{(n-1)\times(n-1)}\right) = (\lambda - x)p_g$, avec p_g le polynôme caractéristique de l'endomorphisme g ayant C comme matrice associée dans la base $(e_2, e_3, \ldots, e_n)$. Comme p_f est scindé, p_g l'est aussi. Par hypothèse de récurrence, g est triangularisable et il existe une base $(d_2, d_3, \ldots, d_n)$ telle que la matrice T associée à g dans cette base est triangulaire. La matrice associée à f dans la base $(e_1, d_2, d_3, \ldots, d_n)$ sera donc de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda & D \\ O_{(n-1)\times 1} & T \end{pmatrix}$$

et donc triangulaire, ce qui montre que f est triangularisable. ∎

Exemple 3.42 Soit s l'endomorphisme sur $\mathbb{R}^2$ ayant comme matrice associée

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de l'endomorphisme est $p_s = x^2 + 1$. Celui ci n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$. Donc l'endomorphisme n'est pas triangularisable.

Rappelons que tout polynôme est scindé sur $\mathbb{C}$. Donc on a la conséquence suivante du Théorème 3.41.

Corollaire 3.43 *Tout endomorphisme défini sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle (et donc toute matrice de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ pour $n \geq 1$) est triangularisable.*

Exemple 3.44 Soit s' un endomorphisme sur $\mathbb{C}^2$ ayant la même matrice associée que l'endomorphisme défini dans l'Exemple 3.42. Cet endomorphisme est triangularisable. En effet, matrice associée à s' dans la base $\big((1,1),(i,-i)\big)$ est la matrice diagonale, et donc triangulaire

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

3.3 Polynômes annulateurs d'un endomorphisme

3.3.1 Théorème de Hamilton-Cayley

Soit $f \in \mathrm{End}(\mathfrak{L})$ avec $\mathfrak{L}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Dans le chapitre précédent on a vu que pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[x]$ de degré $n \geq 0$ de la forme $P = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ on note

$$P(f) = a_0 + a_1 f + \cdots + a_n f^n$$

où $f^k = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{k}$ pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$

Rappelons aussi que f_0 est l'élément neutre pour la somme dans $\mathbb{K}[x]$ et il est défini comme l'application telle que $f_0(\ell) = 0$ pour tout vecteur $\ell \in \mathbb{L}$.

Proposition 3.45 *Soit $P \in \mathbb{K}[x]$ tel que $P(f) = f_0$. Alors les valeurs propres de f sont des racines de P*

Preuve. Considérons une valeur propre λ de f et deux vecteurs propres ℓ, m pour λ. Comme $\mathfrak{L}(\lambda)$ est un espace vectoriel on a que $\ell + m$ est aussi un vecteur propre de f pour la valeur propre λ. En effet

$$f(\ell + m) = f(\ell) + f(m) = \lambda\ell + \lambda m = \lambda(\ell + m).$$

De plus, pour tout $k \geq 0$ le vecteur ℓ est aussi un vecteur propre de f^k pour la valeur propre λ^k. En effet, cela est vrai pour $k = 0$, car $f^0(\ell) = \lambda^0(\ell)$ et, si on le suppose vrai pour $k - 1$, on a

$$f^k(\ell) = f \circ f^{k-1}(\ell) = f\left(\lambda^{k-1}\ell\right) = \lambda^{k-1} f(\ell) = \lambda^{k-1}\lambda\ell = \lambda^k \ell.$$

Donc, pour tout polynôme $Q \in \mathbb{K}[x]$ on a $(Q(f))(\ell) = Q(\lambda)\,\ell$. Cela implique que

$$P(\lambda)\ell = (P(f))(\ell) = f_0(\ell) = 0$$

et comme $\ell \neq \vec{0}$ cela est possible seulement si λ est une racine de P. ∎

Remarquons que l'inverse de la proposition précédente n'est pas vrai en général. Un polynôme $P \in \mathbb{K}[x]$ qui annule f peut avoir des racines qui ne sont pas des valeurs propres de f.

Le théorème suivant donne un exemple très important de polynôme qui annule f : le polynôme caractéristique.

Théorème 3.46 (de Hamilton-Caylay) *Soit $f \in End(\mathfrak{L})$ et p_f son polynôme caractéristique. Alors*

$$p_f(f) = f_0.$$

Preuve. (*idée*) On suppose que le polynôme caractéristique p_f est scindé dans $\mathbb{K}$ (*avec un raisonnement* a fortiori *on prouve que cela n'est pas restrictif*) et posons $n = \dim \mathfrak{L}$. Comme p_f a toutes ses racines dans $\mathbb{K}$, d'après le Théorème 3.41 il existe une matrice triangulaire A associée à f dans une certaine base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ de $\mathfrak{L}$. La matrice A sera donc de la forme

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \alpha_{1,2} & \cdots & \alpha_{1,n-1} & \alpha_{1,n} \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & \alpha_{2,n-1} & \alpha_{2,n} \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_{3,n-1} & \alpha_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1} & \alpha_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

avec les coefficients diagonaux $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de f, c'est-à-dire que

$$p_f = (\lambda_1 - x)(\lambda_2 - x)\cdots(\lambda_n - x) = (-1)^n (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)\cdots(x - \lambda_n).$$

Considérons maintenant l'endomorphisme g défini par

$$g = (f - \lambda_1 \mathrm{id}) \circ (f - \lambda_2 \mathrm{id}) \circ \cdots \circ (f - \lambda_n \mathrm{id})\,.$$

En utilisant le fait que pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ on a

$$f(e_k) = \alpha_{1,k}\, e_1 + \alpha_{2,k}\, e_2 + \cdots + \alpha_{k-1,k-1}\, e_k + \lambda_k e_k$$

on en déduit que (*calcul long mais pas trop difficile*) $g = f_0$ et donc que $p_f(f) = f_0$. ■

Exemple 3.47 Soient f et $A = A_f$ comme dans l'Exemple 3.6. On a $p_A = p_f = x^2 - 4$ et

$$p_A(A) = A^2 - 4I_{4\times 4} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}^2 - 4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De manière équivalente, l'endomorphisme $p_f(f) = f^2 - 4\mathrm{id}$ est l'endomorphisme nul. Cela implique que l'endomorphisme $f^2 = 4\mathrm{id}$ et donc $f^{2n} = 4^n \mathrm{id}$ pour tout $n \geq 1$.

Exemple 3.48 Soit $B = A_g$ comme dans l'Exemple 3.9. Le polynôme caractéristique de B est $p_B = (1-x)^2(3-x)$ et

$$\begin{aligned} p_B(B) &= \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\right)^2 \left(\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O_{3\times 3} \end{aligned}$$

Comme $p_B(B) = O_{3\times 3}$, on peut calculer aisément

$$B^3 = 5B^2 - 7B + 3I_{3\times 3}.$$

Exemple 3.49 Soit $C = A_h$ comme dans l'Exemple 3.20. Le polynôme caractéristique de C est $p_C = (1-x)^2$ et

$$\begin{aligned} p_C(C) &= \left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)^2 && (3.1)\\ &= \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}^2 = O_{2\times 2}. && (3.2)\end{aligned}$$

De plus, comme $1 - 2C + C^2 = O_{2\times 2}$ on trouve que

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}^2 = 2\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

3.3.2 Polynôme minimal

Soit $f \in \mathrm{End}\,(\mathfrak{L})$ avec $\mathfrak{L}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

Avec le Théorème de Hamilton-Caylay on a montré que $p_f(f) = f_0$. Dans cette section on va construire le “plus petit” polynôme de $\mathbb{K}[x]$ qui annule f.

Proposition 3.50 *Soit $f \in End(\mathfrak{L})$. Il existe un unique polynôme $M \in \mathbb{K}[x]$ unitaire tel que $M(f) = f_0$ et que pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[x]$ on a*

$$P(f) = f_0 \quad \textit{si et seulement si} \quad m_f \textit{ divise } P.$$

Preuve. Considérons la famille

$$\mathcal{P} = \{Q \in \mathbb{K}[x] \mid Q \text{ unitaire et } Q(f) = f_0\}.$$

D'après le Théorème d'Hamilton-Caylay on sait que $(-1)^n p_f \in \mathcal{P}$ et donc que $\mathcal{P}$ est non vide. Choisissons M un polynôme de degré minimal dans $\mathcal{P}$.

Si P est un multiple de M, c'est-à-dire si $P = T \cdot M \in \mathbb{K}[x]$ pour un certain polynôme T, alors $P(f) = T(f) \circ M(f) = f_0$, donc P annule f.

Réciproquement, si P est un polynôme qui annule f. Alors, en appliquant la division euclidienne de P par M on trouve que $P = QM + R$ pour des certains polynômes $Q, R \in \mathbb{K}[x]$ avec $R = 0$ ou bien R de degré inférieur au degré de M. Supposons par l'absurde que $R \neq 0$ et donc que $R = a_0 + a_1x + \cdots a_rx^r$ pour un certain $r \in \mathbb{N}$ et $a_0, a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{K}$. Alors, d'après l'hypothèse, on a

$$f_0 = P(f) = Q(f) \circ M(f) + R(f) = f_0 + R(f) = R(f).$$

Donc R annule f. Le polynôme $\frac{1}{a_r}R$ est unitaire e tel qu'il annule f, donc il est dans $\mathcal{P}$. De plus, il a le même degré de R et donc degré inférieur à celui de M, ce qui est impossible car on a choisi M de degré minimal dans $\mathcal{P}$. Cela implique que $R = 0$ et que M divise P.

Montrons maintenant l'unicité de M. Soit maintenant N un autre polynôme ayant les mêmes propriétés vues ci-dessus pour M. Cela implique que N divise M et que M divise N. Comme les deux polynômes ne sont pas nuls (il sont unitaires), il existe un $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tels que $N = \alpha M$. Mais comme N est unitaire, on a forcement $\alpha = 1$ et donc $N = M$. ∎

Le polynôme défini dans la Proposition 3.50 est appelé le *polynôme minimal* de f et est noté par m_f.

D'après la proposition précédente et le Théorème d'Hamilton-Caylay on sait que pour tout endomorphisme f le polynôme minimale m_f divise le polynôme caractéristique p_f. Le résultat suivant nous dis, de plus, que le polynôme caractéristique et le polynôme minimal ont les mêmes racines dans $\mathbb{K}$ (la multiplicité peut être différente).

Proposition 3.51 *Soit $f \in End(\mathfrak{L})$. Un scalaire λ est une valeur propre de f si et seulement si λ est une racine de m_f.*

Preuve. D'après la remarque précédente on sait que si $m_f(\lambda) = 0$ alors $p_f(\lambda) = 0$ et donc $\lambda \in \mathrm{Spect}\,(f)$.

Soit maintenant $\lambda \in \mathrm{Spect}\,(f)$ et soit ℓ un vecteur propre de f pour λ. Pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[x]$ on a $P(f)(\ell) = P(\lambda)\ell$. Donc

$$m_f(\lambda)\ell = m_f(f)(\ell) = f_0(\ell) = 0$$

et comme $\ell \neq \vec{0}$ on a $m_f(\lambda) = 0$. ∎

La proposition précédente nous dis que si le polynôme caractéristique d'un endomorphisme f est de la forme

$$p_f = (\lambda_1 - x)^{m_1}(\lambda_2 - x)^{m_2} \cdots (\lambda_r - x)^{m_R}$$

avec $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ les valeurs propres de f et $m_i = m(\lambda_i)$ les respectives multiplicités, alors le polynôme minimal de f est de la forme

$$m_f = (-1)^k(\lambda_1 - x)^{n_1}(\lambda_2 - x)^{n_2} \cdots (\lambda_r - x)^{n_r}$$

avec $n_i \leq m_i$ pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ et $k = n_1 + n_2 + \cdots + n_r$.

Comme pour le polynôme caractéristique, on peut montrer que toutes matrices associées à un même endomorphisme ont le même polynôme minimal (rappelez-vous de la définition de polynôme minimal d'une matrice vue cours d'Algèbre Linéaire I).

Exemple 3.52 Soit f l'endomorphisme défini dans l'Exemple 3.5. Comme le spectre de f est simple on a $m_f = p_f = (2 - x)(-2 - x)$.

Exemple 3.53 Soit g l'endomorphisme défini dans l'Exemple 3.9. On sait que polynôme minimal de g est de la forme $m_g = (-1)^{n+1}(1 - x)^n(3 - x)$ avec

$1 \leq n \leq 2$. En effet, on trouve $n = 1$ car $(1-g)(3-g) = f_0$ ou, de manière équivalente

$$(I_{3\times3} - A_g)\,(3I_{3\times3} - A_g) = O_{3\times3}$$

où A_g est la matrice associée à g vue dans l'Exemple 3.9.

Le théorème suivant (donné sans preuve) nous explique l'importance du polynôme minimal pour décider si un endomorphisme est diagonalisable ou moins.

Théorème 3.54 *Un endomorphisme f est diagonalisable si et seulement si m_f est scindé dans $\mathbb{K}$ et si les racines de m_f sont simples.*

Exemple 3.55 Soit h l'endomorphisme défini dans l'Exemple 3.20. On sait que le polynôme minimal de h est de la forme $m_h = (-1)^n(1-x)^n$ avec $1 \leq n \leq 2$. Dans ce cas-ci on trouve $n = 2$ car l'endomorphisme $\mathrm{id} - h$ est différent de l'endomorphisme nul, ou équivalemment

$$I_{2\times2} - A_h \neq O_{2\times2} \quad \text{tandis que} \quad \left(I_{2\times2} - A_h\right)^2 = O_{2\times2}.$$

3.4 Décomposition d'un endomorphisme

3.4.1 Décomposition des noyaux

Soit $f \in \mathrm{End}\,(\mathfrak{L})$ avec $\mathfrak{L}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. D'après le Théorème d'Hamilton-Cayley on sait que $p_f(f) = f_0$, avec p_f le polynôme caractéristique de f. Donc l'endomorphisme $p_f(f)$ envoie tout vecteur de $\mathfrak{L}$ dans le vecteur nul $\vec{0}$, c'est-à-dire que

$$\mathfrak{L} = \mathrm{Ker}\,(p_f(f))\,.$$

D'après le Corollaire 3.31 on sait que si en plus f est diagonalisable on a aussi

$$\mathfrak{L} = \mathrm{Ker}\,(f - \lambda_1\mathrm{id}) \oplus \mathrm{Ker}\,(f - \lambda_2\mathrm{id}) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Ker}\,(f - \lambda_r\mathrm{id})$$

avec $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ les valeurs propres distinctes de f.

Pour un endomorphisme quelconque on a le résultat suivant (donné sans preuve) [1].

Théorème 3.56 (de décomposition des noyaux) *Soit $f \in End\,(\mathfrak{L})$ et soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ ses valeurs propres distincts. Alors*

$$\mathfrak{L} = Ker\left((f - \lambda_1\mathrm{id})^{m(\lambda_1)}\right) \oplus Ker\left((f - \lambda_2\mathrm{id})^{m(\lambda_2)}\right) \oplus \cdots \oplus Ker\left((f - \lambda_r\mathrm{id})^{m(\lambda_r)}\right)$$

où $m(\lambda_i)$ est la multiplicité de λ_i pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$.

1. En considérant des polynômes quelconques $P_1, P_2, \ldots, P_r$ premiers entre eux, on peut démontrer que les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Ker}\,(P_i(f))$ sont en somme directe, ce qui généralise à la fois le Corollaire 3.31 et le Théorème de décomposition des noyaux.

Les sous-espace $\mathrm{Ker}\left((f-\lambda_i \mathrm{id})^{m(\lambda_i)}\right)$ est appelé le *sous-espace caractéristique* pour la valeur propre λ_i.

Exemple 3.57 Soit h l'endomorphisme de $\mathbb{C}^2$ vu dans l'Exemple 3.20. La seule valeur propre de h est 1 et elle a multiplicité 2.

Le sous-espace propre $\mathbb{C}^2(1) = \mathrm{Ker}\,(h - \mathrm{id}) = \{(z,0) \mid z \in \mathbb{C}\} \simeq \mathbb{C}$ a dimension 1. On voit facilement que $(h-\mathrm{id})^2 = f_0$ et donc que le sous-espace caractéristique vérifie

$$\mathbb{C}^2 = \mathrm{Ker}\left((h-\mathrm{id})^2\right).$$

Remarquons que pour les valeurs propres de multiplicité 1 les deux notions de sous-espaces propres et sous-espaces caractéristiques coïncident. En général, pour toute valeur propre λ de f on a $\mathfrak{L}(\lambda) \subset \mathrm{Ker}\left((f-\lambda\mathrm{id})^{m(\lambda)}\right)$. En effet, on peut démontrer par récurrence sur $k \geq 1$ que

$$\mathfrak{L}(\lambda) = \mathrm{Ker}\,(f-\lambda\mathrm{id}) \subset \mathrm{Ker}\left((f-\lambda\mathrm{id})^k\right). \ (\texttt{Exercice})$$

De plus, similairement à ce que on a montré dans la Proposition 3.13, tout sous-espace caractéristique est stable par f, c'est-à-dire que

$$\ell \in \mathrm{Ker}\left((f-\lambda\mathrm{id})^{m(\lambda)}\right) \quad \Longrightarrow \quad f(\ell) \in \mathrm{Ker}\left((f-\lambda\mathrm{id})^{m(\lambda)}\right). \ (\texttt{Exercice})$$

3.4.2 Forme diagonale par blocs

Soit $f \in \mathrm{End}\,(\mathfrak{L})$ avec $\mathfrak{L}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Supposons que p_f est scindé sur $\mathbb{K}$.

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ les valeur propres distincts de f et notons pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$, $\mathfrak{L}_i = \mathrm{Ker}\left((f-\lambda_i\mathrm{id})^{m(\lambda_i)}\right)$ le sous-espace caractéristique pour la valeur λ_i. D'après la section précédent on a $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_1 \oplus \mathfrak{L}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{L}_r$.

Pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ posons f_i la restriction de f à $\mathfrak{L}_i$, c'est-à-dire l'endomorphisme

$$\begin{array}{rccc} f_i : & \mathfrak{L}_i & \to & \mathfrak{L}_i \\ & \ell & \mapsto & f(\ell) \end{array}$$

et considérons une base $E_i = (e_{i,1}, e_{i,2}, \ldots, e_{i,k_i})$ de $\mathfrak{L}_i$.

Le n-uplet $E = (E_1, E_2, \cdots, E_r) = (e_{1,1}, \ldots, e_{1,k_1}, e_{2,1}, \ldots, e_{r,k_r})$ est une base de $\mathfrak{L}$. La matrice associée à f dans cette base sera de la forme

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_r \end{pmatrix}$$

avec A_i la matrice associée à f_i dans la base E_i. Le polynôme caractéristique de f est

$$\begin{aligned} p_f &= \det\,(A - xI_{n\times n}) \\ &= \det\,(A_1 - xI_{k_1\times k_1}) \det\,(A_2 - xI_{k_2\times k_2}) \cdots \det\,(A_r - xI_{k_r\times k_r}) \\ &= p_{f_1}\, p_{f_2}\, \cdots\, p_{f_r} \end{aligned}$$

et comme p_f est scindé, pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ on a que p_{f_i} est aussi scindé et donc que A_i et f_i sont triangularisables.

D'autre part, la seul valeur propre for f_i est λ_i. En effet, chaque sous-espace espace caractéristique $\mathfrak{L}_i$ contient le sous-espace propre $\mathfrak{L}(\lambda_i)$ et $\mathfrak{L}_i \cap \mathfrak{L}_j = \{\vec{0}\}$ pour tout $i \neq j$, donc les seules vecteurs propres que l'on trouve dans $\mathfrak{L}_i$ sont ceux pour la valeur propre λ_i.

Cela implique que chaque sous-espace $\mathfrak{L}_i$ peut être représenté dans une base opportune par une matrice triangulaire de la forme

$$T_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_i & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_i \end{pmatrix}$$

et que f a comme matricé associée dans une base opportune la matrice diagonale à blocs

$$T = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \begin{matrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_1 \end{matrix} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} \lambda_2 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_2 \end{matrix} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \begin{matrix} \lambda_r & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_r \end{matrix} \end{array}\right)$$

De plus, pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ le polynôme caractéristique de f_i est de la forme $p_{f_i} = (\lambda_i - x)^{k_i}$, et comme $p_f = p_{f_1}\ p_{f_2}\ \cdots\ p_{f_r}$, on a $\dim \mathfrak{L}_i = m(\lambda_i)$ pour tout i.

Clairement, tout endomorphisme diagonalisable peut s'écrire comme une matrice triangulaire par blocs avec les blocs de taille 1.

Exemple 3.58 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ ayant comme matrice associée dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$

$$A_f = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de f est $p_f = (-1-x)(2-x)^2$, donc on a Spect $(f) = \{2, -1\}$ avec $m(2) = 2$ et $m(-1) = 1$. Les sous-espaces caractéristiques sont

$$\mathfrak{M} = \mathrm{Ker}\,(f - 2\mathrm{id})^2 = \{(0, a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

et

$$\mathfrak{N} = \mathrm{Ker}\,(f + \mathrm{id})\,\{(-3a, 0, a) \mid a \in \mathbb{R}\}.$$

La matrice associée à f dans la base $\big((0,1,0),(0,0,1),(-3,0,1)\big)$ est

$$A'_f = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

3.4.3 Endomorphismes nilpotents

Un endomorphisme $f \in \mathrm{End}\,(\mathfrak{L})$, avec $\mathfrak{L}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, est dit *nilpotent* s'il existe un entier $p > 0$ tel que $f^p = f_0$. Le plus petit entier tel que cette propriété est vérifié est appelé l'*indice* de f.

Exemple 3.59 Soit n l'endomorphisme de $\mathbb{C}^2$ ayant matrice associée dans la base canonique

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'endomorphisme est nilpotent avec indice 2. En effet la matrice associée à n^2 est

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = O_{2\times 2}.$$

Proposition 3.60 *Soit f un endomorphisme nilpotent. Alors Spect$(f) = \{0\}$.*

Preuve. Soit p l'indice de f. La valeur 0 est une valeur propre de f. En effet pour tout $\ell \in \mathfrak{L}$

$$f\left(f^{p-1}(\ell)\right) = f^p(\ell) = f_0(\ell) = \vec{0} = 0 \cdot f^{p-1}(\ell).$$

Montrons qu'elle est la seule. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de f. Alors $f(\ell) = \lambda\ell$ pour un certain vecteur $\ell \neq \vec{0}$. En raisonnant par récurrence on montre que $\lambda^p \ell = f^p(\ell) = \vec{0}$. Comme $\ell \neq \vec{0}$ on a forcement $\lambda = 0$. ∎

Proposition 3.61 *Soient f, g deux endomorphismes nilpotents de $\mathfrak{L}$ qui commutent. Alors $f + g$ est aussi nilpotent.*

Preuve. Supposons que $f \circ g = g \circ f$. Soient p, q les indices respectives de f et g. Alors, en utilisant la formule du binôme de Newton on trouve

$$(f+g)^{p+q} = \sum_{k=0}^{p+q} \alpha_k\, f^k \circ g^{p+q-k} \qquad \text{avec } \alpha_k = \binom{p+q}{k}.$$

Dans chaque terme de la somme on a soit :
- $k \geq p$ et donc $f^k = f_0$,
- $k < p$ et donc $g^{p+q-k} = f_0$.

Donc $(f+g)^{p+q} = f_0$, ce qui montre que $f+g$ est nilpotent. ∎

Proposition 3.62 *Soit $f \in End(\mathfrak{L})$ avec $\mathfrak{L}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Alors f est nilpotent si et seulement si $p_f = (-x)^n$.*

Preuve. Facile à démontrer en utilisant le Théorème de Hamilton-Cayley et la Proposition 3.60. (`Exercice`) ∎

Exemple 3.63 Le polynôme caractéristique de l'endomorphisme f défini dans l'Exemple 3.59 est

$$p_f = \det\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = x^2$$

La proposition 3.62 nous dit en particulier que tout endomorphisme nilpotent est triangularisable et que sa matrice associée dans une base opportune sera de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire une matrice strictement triangulaire supérieure (triangulaire supérieure avec que des 0 dans la diagonale).

Remarquons aussi que f_0 est le seul endomorphisme qui est à la fois diagonalisable et nilpotent.

3.4.4 Endomorphismes co-diagonalisables

Avec le Théorème suivant on prouve que deux endomorphismes diagonalisables qui commutent sont *co-diagonalisables.*

Théorème 3.64 (de la diagonalisation simultanée) *Soient $f, g \in End(\mathfrak{L})$ diagonalisables et tels que $f \circ g = g \circ f$. Alors il existe une base de $\mathfrak{L}$ telle que le matrices associées à f et à g dans cette base sont diagonales.*

Preuve. Posons $n = \dim(\mathfrak{L})$ et raisonnons par récurrence sur n. Si l'espace a dimension 1 alors le résultat est trivialement vrai. Supposons maintenant que le théorème soit vrai pour tout espace de dimension au plus $n-1$.

Soit $\mathrm{Spect}(f) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r\}$. Si f est une homothétie, c'est-à-dire si $r = 1$, alors la matrice associée à f sera diagonale dans n'importe quelle base, et donc il suffit de choisir une base qui diagonalise g.

Si f n'est pas une homothétie, alors on peut décomposer l'espace vectoriel de manière non triviale comme $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}(\lambda_1) \oplus \mathfrak{L}(\lambda_2) \oplus \cdots \mathfrak{L}(\lambda_r)$. Chaque sous-espace propre $\mathfrak{L}(\lambda_i)$ a dimension strictement inférieure à n. De plus, ce sous-espace est stable par g. En effet pour tout $\ell \in \mathfrak{L}(\lambda_i)$

$$f(g(\ell)) = (f \circ g)(\ell) = (g \circ f)(\ell) = g(f(\ell)) = g(\lambda_i \ell) = \lambda_i g(\ell)$$

et donc $g(\ell) \in \mathfrak{L}(\lambda_i)$. Par hypothèse de récurrence, on a que f et g sont co-diagonalisables en $\mathfrak{L}(\lambda_i)$ pour tout i. D'après la Section 3.4.2 on trouve donc que f et g sont co-diagonalisables sur tout $\mathfrak{L}$. ∎

3.4.5 Décomposition de Dunford

Avec le théorème suivant [2] on va montrer que tout endomorphisme triangularisable peut s'exprimer de manière unique à partir d'un endomorphisme diagonalisable et d'un endomorphisme nilpotent.

Théorème 3.65 (Décomposition de Dunford) *Soit $f \in End(\mathfrak{L})$ avec p_f est scindé dans $\mathbb{K}$. Alors f s'écrit de manière unique*

$$f = d + n$$

avec d un endomorphisme diagonalisable de $\mathfrak{L}$ et n un endomorphisme nilpotent de $\mathfrak{L}$ tels que $d \circ n = n \circ d$.

Preuve. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ les valeurs propres de f et posons pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$, $\mathfrak{L}_i = \mathrm{Ker}\left((f - \lambda_i \mathrm{id})^{m(\lambda_i)}\right)$ le sous-espace caractéristique pour la valeur propre λ_i. D'après le Théorème de décomposition des noyaux on sait que

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_1 \oplus \mathfrak{L}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{L}_r.$$

Considérons l'endomorphisme d tel que sa restriction à chaque $\mathfrak{L}_i$ soit $\lambda_i \mathrm{id}_{\mathfrak{L}_i}$, c'est-à-dire l'endomorphisme défini par

$$\begin{array}{rccc} d: & \mathfrak{L}_1 \oplus \mathfrak{L}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{L}_r & \to & \mathfrak{L}_1 \oplus \mathfrak{L}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{L}_r \\ & \ell_1 + \ell_2 + \cdots + \ell_r & \mapsto & \lambda_1 \ell_1 + \lambda_2 \ell_2 + \cdots + \lambda_r \ell_r \end{array}$$

Cet endomorphisme est clairement diagonalisable et sa matrice associée dans une base opportune sera

$$A_d = \mathrm{diag}\left(\underbrace{\lambda_1, \ldots, \lambda_1}_{m(\lambda_1)}, \underbrace{\lambda_2, \ldots, \lambda_2}_{m(\lambda_2)}, \ldots, \underbrace{\lambda_r, \ldots, \lambda_r}_{m(\lambda_r)}\right).$$

Posons $n = f - d$ et montrons que cet endomorphisme est nilpotent et qu'il commute avec d. Chaque sous-espace propre $\mathfrak{L}_i$ est clairement stable par d (par construction) et par f (d'après la Section 3.4.1), il suffit de le vérifier pour les restrictions de n_i et d_i aux $\mathfrak{L}_i$ de n et d respectivement. Or, chaque $d_i = \lambda_i \mathrm{id}_{\mathfrak{L}_i}$ est une homothétie et donc il commute avec n'importe quel endomorphisme de $\mathfrak{L}_i$. De plus, $n_i = f_i - d_i$ est un endomorphisme nilpotent car, par définition de $\mathfrak{L}_i$, on a $(f_i - d_i)^{m(\lambda_i)} = f_0$. Donc on a bien la décomposition que l'on cherchait.

2. Théorème que les francophones attribuent à l'américain Nelson Dunford tandis que les anglophones attribuent aux français Camille Jordan et Claude Chevalley !

Montrons maintenant que cette décomposition est unique. Supposons qu'ils existent deux endomorphismes diagonalisables d, d' et deux endomorphismes nilpotents n, n' tels que

$$f = d + n = d' + n'.$$

D'après le Théorème 3.64, les endomorphismes d, d' sont co-diagonalisables, et donc $d - d'$ est diagonalisable. L'endomorphisme $d - d' = n - n'$ est à la fois nilpotent et diagonalisable, donc il est f_0. Cela implique que $d = d'$ et que $n = n'$. ∎

Tout endomorphisme f diagonalisable peut s'écrire comme $f = f + f_0$ avec $f \circ f_0 = f_0 \circ f = f_0$. Donc la décomposition de Dunford dans ce cas est triviale.

Exemple 3.66 Considérons l'endomorphisme h vu dans l'Exemple 3.20. Alors h peut s'écrire comme $\mathrm{id} + n$ avec n l'endomorphisme vu dans l'Exemple 3.59. Clairement $n \circ \mathrm{id} = \mathrm{id} \circ n$. En passant aux matrices associées on trouve

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3.4.6 Décomposition de Jordan

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $k \geq 1$. La matrice $J_k(\lambda)$ carré de taille k à coefficients dans $\mathbb{K}$ de la forme

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{k \times k}(\mathbb{K})$$

est appelée *bloc de Jordan* (ou *cellule de Jordan*).

Théorème 3.67 (de Jordan) *Soit $f \in End(\mathfrak{L})$ tel que p_f soit scindé dans $\mathbb{K}$. Alors il existe une base de $\mathfrak{L}$ telle que la matrice associée à f est de la forme*

$$A_f = \begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{k_2}(\lambda_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_{k_r}(\lambda_s) \end{pmatrix}$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ sont les valeurs propres de f (pas nécessairement distincts) et $k_i \geq 1$ pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$.

Remarquons que dans le théorème une même valeur propre λ peut apparaître dans plusieurs blocs différents. De plus, on peut démontrer que la multiplicité d'une valeur propre λ dans le polynôme minimal est égale à la plus grande taille k_i des blocs $J_{k_i}(\lambda)$ (`Exercice`).

Exemple 3.68 Considérons un endomorphisme ayant comme matrice associée dans une base opportune

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

La seule valeur propre de l'endomorphisme est 2 et sa décomposition de Jordan est exactement

$$A = \begin{pmatrix} J_3(2) & \\ & J_1(2) \end{pmatrix}.$$

Le polynôme minimal de l'endomorphisme est $(2-x)^3$.

Chapitre 4

Formes bilinéaires et formes quadratiques

4.1 Formes bilinéaires

Soit $\mathfrak{L}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Dans la Section 2.4.4 on a définit une forme multi-linéaire comme une application

$$f : \mathfrak{L} \times \mathfrak{L} \times \cdots \mathfrak{L} \to \mathbb{K}$$

telle que la restriction de f a chacune de ses composantes soit linéaire.

Quand l'application a comme domaine $\mathfrak{L} \times \mathfrak{L}$ on parlera de *forme bilinéaire* (ou 2-*linéaire*). Une forme bilinéaire est donc une application

$$b : \mathfrak{L} \times \mathfrak{L} \to \mathbb{K}$$

telle que pour tous $\ell, m, n \in \mathfrak{L}$ et tous $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ on a

— $b(\alpha\ell + \beta m, n) = \alpha\ b(\ell, n) + \beta\ b(m, n)$ et

— $b(\ell, \alpha m + \beta n) = \alpha\ b(\ell, m) + \beta\ b(\ell, n)$.

Exemple 4.1 Dans l'Exemple 2.78 on a vu que l'application

$$\begin{array}{cccc} f & \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \mapsto & xy \end{array}$$

est bilinéaire.

En effet, cela est le cas de toute application de la forme

$$b(x, y) = g(x)\ h(y)$$

avec g, h formes linéaires sur $\mathbb{K}$

Exemple 4.2 L'application

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{Q}^2 \times \mathbb{Q}^2 & \to & \mathbb{Q} \\ & \big((x,y),(z,t)\big) & \mapsto & (x+2y)(z-t) = \\ & & & xz - xt + 2yz - 2yt \end{array}$$

est une forme bilinéaire.

4.1.1 Matrice associée à une forme bilinéaire

Soit $\mathfrak{L}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $E = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de $\mathfrak{L}$. À toute forme bilinéaire $b : \mathfrak{L} \times \mathfrak{L} \to \mathbb{K}$ on peut associer une matrice $A_b \in \mathcal{M}_{n,n}(K)$ relative à la base E dont le coefficient en position (i,j) est égal a $b(e_i, e_j)$. Cette matrice est dite la *matrice associée à b* (ou simplement la *matrice de b*) dans la base E.

Exemple 4.3 Soit f la forme bilinéaire définie dans l'Exemple 4.2 et soit E la base canonique de $\mathbb{Q}^2$. La matrice de f sera donc

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Dans les chapitres précédents on a vu que l'on peut associer à chaque vecteur $\ell \in \mathfrak{L}$ un vecteur colonne $L \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ ayant comme coordonnés les coefficients de ℓ dans une base fixé, c'est à dire

$$\ell = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n \qquad \longleftrightarrow \qquad L = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Proposition 4.4 *Soit $\mathfrak{L}, \mathbb{K}, E$ et b comme en haut. Alors la matrice de b est la seule matrice A telle que pour tous vecteurs $\ell, m \in \mathfrak{L}$ on a*

$$b(\ell, m) = L^\top A M$$

où L et M sont les vecteurs colonnes correspondants à ℓ et m respectivement.

Exemple 4.5 Soit f comme dans l'Exemple 4.3. Considérons les deux vecteurs $(1,-1), (0,3) \in \mathbb{Q}^2$. On a

$$b\big((1,-1),(0,3)\big) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 3.$$

La matrice que l'on vient de définir dépend du choix de la base. La proposition suivante nous montre comment passer d'une représentation à une autre d'une même forme bilinéaire.

Proposition 4.6 (Changement de base) *Soit b une forme bilinéaire sur $\mathfrak{L}$, E, E' deux bases de $\mathfrak{L}$ et A, A' les matrices de b dans les bases E et E' respectivement. Alors on a*

$$A' = P^\top AP$$

où P est la matrice de passage de E et E'.

Preuve. (`Exercice`) ∎

L'espace des formes bilinéaires sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n est donc en bijection avec l'espaces des matrices carrés de taille n à coefficients dans $\mathbb{K}$. Cela implique, en particulier, que la somme, le produit par scalaire et, en général, toute combinaison linéaire de formes bilinéaires est encore une forme bilinéaire.

4.1.2 Formes bilinéaires symétriques et antisymétriques

Dans la Section 2.4.4 on a introduit aussi la notion de forme multi-linéaire alternée. Ici on va définir une nouvelle notion. Une forme bilinéaire b est dite *symétrique* si pour tous vecteurs $\ell, m \in \mathfrak{L}$ on a

$$b(\ell, m) = b(m, \ell).$$

Exemple 4.7 L'application vue dans l'Exemple 4.1 est symétrique, tandis que celle vue dans l'Exemple 4.2 ne l'est pas.

Exemple 4.8 Les formes bilinéaires symétriques sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ sont toutes et seules de la forme (`Exercice`)

$$\begin{array}{rrcl} b: & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & \big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) & \mapsto & \alpha\ x_1x_2 + \beta\ (x_1y_2 + y_1x_2) + \gamma\ y_1y_2 \end{array}$$

pour certains scalaires $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Proposition 4.9 *Soit $b : \mathfrak{L} \times \mathfrak{L} \to \mathbb{K}$ une forme bilinéaire et A la matrice associée à b dans une certaine base. La forme bilinéaire b est symétrique si et seulement si A est une matrice symétrique.*

Preuve. Par définition b est symétrique si on a $b = b'$ avec $b'(\ell, m) = b(m, \ell)$ pour tous $\ell, m \in \mathfrak{L}$. D'après la Proposition 4.4 on a

$$b'(\ell, m) = b(m, \ell) = M^\top AL = \left(M^\top AL\right)^\top = L^\top A^\top M$$

où L, M sont les vecteurs colonnes correspondants à ℓ et m. Donc b est symétrique si et seulement si $A = A^\top$. ∎

Un forme bilinéaire b est dite *asymétrique* si pour tous $\ell, m \in \mathfrak{L}$ on a

$$b(\ell, m) = -b(m, \ell).$$

Cette notion corresponde avec celle de forme alternée vue dans la Section 2.4.4 [1].

Exemple 4.10 On a vu dans la Section 2.4.4 que le déterminant est une application bilinéaire, si on la considère comme application sur les vecteurs colonnes. Elle est asymétrique. Par exemple, pour une matrice dans $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{K})$, on voit facilement que

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc = -(bc - ad) = -\det\begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix}.$$

Proposition 4.11 *Toute forme bilinéaire se décompose de façon unique comme somme d'une forme bilinéaire symétrique et d'une forme bilinéaire antisymétrique.*

Preuve. Soit $b : \mathfrak{L} \times \mathfrak{L} \to \mathbb{K}$ une forme bilinéaire. Alors, pour tout vecteur $(\ell, m) \in \mathfrak{L} \times \mathfrak{L}$ on peut écrire

$$b(\ell, m) = \frac{b(\ell, m) + b(m, \ell)}{2} + \frac{b(\ell, m) - b(m, \ell)}{2}.$$

Or, l'application

$$\begin{array}{rccc} b_s : & \mathfrak{L} \times \mathfrak{L} & \to & \mathbb{K} \\ & (\ell, m) & \mapsto & \frac{b(\ell,m)+b(m,\ell)}{2} \end{array}$$

est clairement une forme bilinéaire symétrique, tandis que l'application

$$\begin{array}{rccc} b_a : & \mathfrak{L} \times \mathfrak{L} & \to & \mathbb{K} \\ & (\ell, m) & \mapsto & \frac{b(\ell,m)-b(m,\ell)}{2} \end{array}$$

est une forme bilinéaire antisymétrique. ∎

Exemple 4.12 Considérons l'application bilinéaire f défini dans l'Exemple 4.2. Elle peut se décomposer comme $f = f_s + f_a$ avec

$$\begin{array}{rccc} f_s : & \mathbb{Q}^2 \times \mathbb{Q}^2 & \to & \mathbb{Q} \\ & \big((x, y), (z, t)\big) & \mapsto & xz + \frac{1}{2}(xt + yz) - 2yt \end{array}$$

une forme bilinéaire symétrique, et

$$\begin{array}{rccc} f_a : & \mathbb{Q}^2 \times \mathbb{Q}^2 & \to & \mathbb{Q} \\ & \big((x, y), (z, t)\big) & \mapsto & \frac{3}{2}(yz - xt) \end{array}$$

une forme bilinéaire antisymétrique.

4.2 Espaces euclidiens

Dans cette section on considère $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

1. Rappelons que l'on travaille uniquement avec des corps $\mathbb{K}$ où $n \cdot 1_{\mathbb{K}} \neq 0$ pour tout $n > 0$. Dans le cas où $2 \cdot 1_{\mathbb{K}} = 0_{\mathbb{K}}$, on peut trouver des formes antisymétriques qui ne sont pas alternées.

4.2.1 Produit scalaire

Soit $\mathfrak{L}$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Une forme bilinéaire symétrique $b : \mathfrak{L} \times \mathfrak{L} \to \mathbb{R}$ est appelée un *produit scalaire* si pour tout vecteur $\ell \neq \vec{0}$ on a $b(\ell, \ell) > 0$.

Exemple 4.13 L'application

$$\begin{array}{cccc} f : & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & \big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) & \mapsto & x_1 x_2 + y_1 y_2 \end{array}$$

est un produit scalaire. En effet, f est une forme bilinéaire symétrique (voir Exemple 4.8). De plus, pour tout vecteur non nul $\ell = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ on a $f(\ell) = x^2 + y^2 > 0$.

Plus en général, pour tout $n \geq 1$ l'application linéaire

$$\begin{array}{cccc} f : & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \to \mathbb{R} & \\ & \big((a_1, a_2, \ldots, a_n), (b_1, b_2, \ldots, b_n)\big) & \mapsto & a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n \end{array}$$

est un produit scalaire appelé le *produit scalaire usuel* (ou *canonique*) de $\mathbb{R}^n$.

Un $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathfrak{L}$ muni d'un produit scalaire est appelé un *espace euclidien*. Dans ce cas-ci on notera $(\ell \mid m)$ le produit scalaires des deux vecteurs $\ell, m \in \mathfrak{L}$.

Exemple 4.14 L'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ est un espace euclidien avec produit scalaire le produit scalaire usuel.

Proposition 4.15 *Tout sous-espace vectoriel d'un espace euclidien est un espace euclidien.*

Preuve. Soit $\mathfrak{L}$ un espace euclidien et $\mathfrak{M}$ un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{L}$. Alors, il est facile de démontrer que la restriction du produit scalaire de $\mathfrak{L}$ à $\mathfrak{M}$ est encore un produit scalaire. ∎

4.2.2 Vecteurs orthogonaux

Soit $\mathfrak{L}$ un espace euclidien. Deux vecteurs $\ell, m \in \mathfrak{L}$ sont dits *orthogonaux* si $(\ell \mid m) = 0$.

Exemple 4.16 Tout vecteur d'un espace euclidien est orthogonal au vecteur nul $\vec{0}$.

Exemple 4.17 Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$ les vecteurs (x, y) et $(-y, x)$ sont orthogonaux. En effet

$$\big((x, y) \mid (-y, x)\big) = x(-y) + yx = 0.$$

Soit $\mathfrak{M}$ un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{L}$. On dit qu'un vecteur $\ell \in \mathfrak{L}$ est *orthogonal* à $\mathfrak{M}$ s'il est orthogonal à tout vecteur de $\mathfrak{M}$, c'est-à-dire si

$$(\ell \mid m) = 0 \qquad \text{pour tout } m \in \mathfrak{M}.$$

L'ensemble de tous les vecteurs de $\mathfrak{L}$ orthogonaux à $\mathfrak{M}$ est appelé le sous-espace *orhogonal* de $\mathfrak{M}$ et est noté avec $\mathfrak{M}^\perp$.

Exemple 4.18 Pour tout espace $\mathfrak{L}$ on a

$$\mathfrak{L}^\perp = \{\vec{0}\} \qquad \text{et} \qquad \{\vec{0}\}^\perp = \mathfrak{L}.$$

D'après la définition d'espace orthogonal on trouve facilement que pour tout sous-espace $\mathfrak{M}$ on a $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{M}^\perp = \{\vec{0}\}$ (`Exercice`).

De plus, on peut démontrer que $\mathfrak{M} \subset \left(\mathfrak{M}^\perp\right)^\perp$ (`Exercice`).

Théorème 4.19 *Soit $\mathfrak{M}$ un sous-espace vectoriel de dimension finie de $\mathfrak{L}$. Alors $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}^\perp$ sont supplémentaires. De plus, $\left(\mathfrak{M}^\perp\right)^\perp = \mathfrak{M}$.*

Exemple 4.20 Considérons l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ avec $n \geq 2$. Pour tout n-uplet $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, l'hyperplan

$$H_{\vec{a}} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0\}$$

est un sous-espace de dimension $n+1$ (voir l'Exemple 1.21). L'orthogonal de $H_{\vec{a}}$ est la droite

$$\{\lambda\vec{a} \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = \{(\lambda a_1, \lambda a_2, \ldots, \lambda a_n) \in \mathbb{R}^n \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Donc $H_{\vec{a}}$ est l'ensemble des vecteurs $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ tels que $(\vec{a} \mid \vec{x}) = 0$.

4.2.3 Norme euclidienne

Un espace vectoriel $\mathfrak{L}$ est dit *normé* s'il existe une application

$$\|\cdot\| : \mathfrak{L} \to \mathbb{R}^+$$

appelée *norme* sur $\mathfrak{L}$, telle que

- $\forall\, \ell \in \mathfrak{L} \quad \Big(\|\ell\| = 0 \ \Rightarrow\ \ell = \vec{0}\Big)$ (séparation)
- $\forall\, \ell \in \mathfrak{L},\ \forall\, \alpha \in \mathbb{R} \quad \|\alpha\ell\| = |\alpha|\ \|\ell\|$ (homogénéité)
- $\forall\, \ell, m \in \mathfrak{L} \quad \|\ell + m\| \leq \|\ell\| + \|m\|$ (inégalité triangulaire)

Exemple 4.21 Rappelons du cours d'analyse que l'application $\|\cdot\|_2$ définie par

$$\|(x_1, x_2, \ldots, x_n)\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

est une norme sur $\mathbb{R}^n$. On peut récrire cette norme, en terme de produit scalaire usuel, comme

$$\|\ell\| = \sqrt{(\ell \mid \ell)}$$

pour tout vecteur $\ell = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Théorème 4.22 (Inégalité de Cauchy-Schwarz) *Soient ℓ, m deux vecteurs d'un espace euclidien. Alors on a*

$$|(\ell \mid m)| \leq \sqrt{(\ell \mid \ell)}\sqrt{(m \mid m)}$$

avec égalité si et seulement si ℓ et m sont colinéaires.

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz on peut associer a chaque espace euclidien une norme.

Proposition 4.23 *Soit $\mathfrak{L}$ un espace euclidien et soit*

$$\begin{array}{rccc} \|\cdot\|: & \mathfrak{L} & \to & \mathbb{R} \\ & \ell & \mapsto & \sqrt{(\ell \mid \ell)} \end{array}$$

Alors $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathfrak{L}$.

Preuve.

i) Clairement $\|\vec{0}\| = \sqrt{(\vec{0} \mid \vec{0})} = \sqrt{0} = 0$. De plus, pour tout vecteur $\ell \in \mathfrak{L}\backslash\{\vec{0}\}$ on a $(\ell \mid \ell) > 0$ par définition de produit scalaire.

ii) Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathfrak{L}$ on a

$$\|\alpha\ell\| \ = \ \sqrt{(\alpha\ell \mid \alpha\ell)} \ = \ \sqrt{\alpha^2(\ell \mid \ell)} \ = \ |\alpha|\sqrt{(\ell \mid \ell)} \ = \ |\alpha| \ \|\ell\|.$$

iii) Pour tout $\ell, m \in \mathfrak{L}$ on a

$$(\ell + m \mid \ell + m) \ = \ (\ell \mid \ell) + 2\,(\ell \mid m) + (m \mid m).$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a $(\ell \mid m) \leq \sqrt{(\ell \mid \ell)}\sqrt{(m \mid m)}$, d'où

$$\begin{aligned} (\ell + m \mid \ell + m) &\leq (\ell \mid \ell) \ + \ 2\,\sqrt{(\ell \mid \ell)}\,\sqrt{(m \mid m)} \ + \ (m \mid m) \\ &= \left(\sqrt{(\ell \mid \ell)}\right)^2 + 2\,\sqrt{(\ell \mid \ell)}\,\sqrt{(m \mid m)} + \left(\sqrt{(m \mid m)}\right)^2 \\ &= \left(\sqrt{(\ell \mid \ell)} + \sqrt{(m \mid m)}\right)^2 \end{aligned}$$

et puisque la fonction racine carrée est croissante, on trouve

$$\|\ell + m\| \ = \ \sqrt{(\ell + m \mid \ell + m)} \ \leq \ \sqrt{(\ell \mid \ell)} + \sqrt{(m \mid m)} \ = \ \|\ell\| + \|m\|.$$

■

La norme définie dans la proposition précédent est appelée la *norme associée au produit scalaire.*

D'après la définition ci-dessus pour tout $\ell, m \in \mathfrak{L}$ on a

$$\begin{aligned} \|\ell + m\|^2 &= (\ell + m \mid \ell + m) \\ &= (\ell \mid \ell) \ + \ 2\,(\ell \mid m) \ + \ (m \mid m) \\ &= \|\ell\|^2 \ + \ 2\,(\ell \mid m) \ + \ \|m\|^2. \end{aligned}$$

Théorème 4.24 (de Pythagore) *Soit $\mathfrak{L}$ un espace euclidien. Deux vecteurs $\ell, m \in \mathfrak{L}$ sont orthogonaux si et seulement si $\|\ell + m\|^2 = \|\ell\|^2 + \|m\|^2$.*

Preuve. D'après la définition on a que ℓ et m sont orthogonaux si et seulement si $(\ell \mid m) = 0$. Or, comme on a vu que

$$\|\ell + m\|^2 = \|\ell\| + \|m\| \;+\; 2\,(\ell \mid m)$$

on en déduit le résultat. ∎

4.3 Formes quadratiques

Soit $\mathfrak{L}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une application $q : \mathfrak{L} \to \mathbb{K}$ est dite une *forme quadratique* s'il existe une forme bilinéaire $b : \mathfrak{L} \times \mathfrak{L} \to \mathbb{K}$ telle que

$$q(\ell) = b(\ell, \ell) \qquad \text{pour tout } \ell \in \mathfrak{L}.$$

Un *corps*K-espace vectoriel $\mathfrak{L}$ muni d'une forme quadratique et appelé un *espace quadratique.*

Exemple 4.25 Soit b la forme bilinéaire sur $\mathbb{Q}$ définie dans l'Exemple 4.2. L'application

$$\begin{array}{rrcl} q: & \mathbb{Q}^2 & \to & \mathbb{Q} \\ & (x,y) & \mapsto & b\big((x,y),(x,y)\big) \\ & & & = x^2 - xy - 2y^2 \end{array}$$

est une forme quadratique sur $\mathbb{Q}$.

Remarquons que, d'après la définition, pour tout scalaire $\alpha \in \mathbb{K}$ et tout vecteur $\ell \in \mathfrak{L}$ on a

$$q(\alpha\ell) = \alpha^2 q(\ell).$$

Exemple 4.26 Dans la Section 4.1 on a vu que le produit de deux formes linéaires est une forme bilinéaire. Donc, pour toute forme linéaire $g : \mathfrak{L} \times \mathfrak{L} \to \mathbb{K}$ l'application

$$\begin{array}{rrcl} q: & \mathfrak{L} & \to & \mathbb{K} \\ & \ell & \mapsto & g(\ell)^2 \end{array}$$

est une forme quadratique.

Comme toute combinaison linéaire de formes bilinéaires est encore une forme bilinéaire, le même résultat est vrai pour les formes quadratiques.

Exemple 4.27 Soient $g_1, g_2, \ldots, g_r \in \mathfrak{L}^*$ des formes linéaires et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{K}$ des scalaires. L'application

$$\begin{array}{rrcl} q: & \mathfrak{L} & \to & \mathbb{K} \\ & \ell & \mapsto & \alpha_1 g_1(\ell)^2 + \alpha_2 g_2(\ell)^2 + \cdots + \alpha_r g_r(\ell)^2 \end{array}$$

est une forme quadratique.

On va voir dans la suite que toute forme quadratique dans un espace de dimension finie peut se décomposer comme dans l'exemple ci-dessus.

Dans la définition de forme quadratique, la forme bilinéaire associée n'est pas unique. Cela est le cas si l'on ajoute une hypothèse supplémentaire.

Proposition 4.28 *Soit $q : \mathfrak{L} \to \mathbb{K}$ une forme quadratique. Il existe une unique forme bilinéaire symétrique $b : \mathfrak{L} \times \mathfrak{L} \to \mathbb{K}$ telle que $q(\ell) = b(\ell, \ell)$ pour tout $\ell \in \mathfrak{L}$.*

Preuve. D'après la définition de forme quadratique on sait qu'il existe une forme bilinéaire $f : \mathfrak{L} \times \mathfrak{L} \to \mathbb{K}$ telle que $q(\ell) = f(\ell, \ell)$ pour tout $\ell \in \mathfrak{L}$.

Considérons l'application $b\mathfrak{L} \times \mathfrak{L}$ définie par

$$b(\ell, m) = \frac{f(\ell, m) + f(m, \ell)}{2}.$$

L'application b est une combinaison linéaire de formes bilinéaires et donc une forme bilinéaire. Elle est clairement symétrique. Pour tout vecteur $\ell \in \mathfrak{L}$ on a $b(\ell, \ell) = q(\ell)$. De plus,

$$\begin{aligned} q(\ell + m) &= b(\ell + m, \ell + m) \\ &= b(\ell, \ell) + 2b(\ell, m) + b(m, m) \\ &= q(\ell) + 2b(\ell, m) + q(m) \end{aligned}$$

d'où on trouve que b est univoquement déterminé par q, car

$$b(\ell, m) = \frac{q(\ell + m) - q(\ell) - q(m)}{2}.$$

■

L'unique forme bilinéaire symétrique définie dans la proposition précédente est dite la *forme bilinéaire symétrique associée à* la forme quadratique q. La *matrice de q* est définie comme la matrice associée à la forme bilinéaire symétrique associée à q.

Exemple 4.29 Soit q comme dans l'Exemple 4.25. L'unique forme bilinéaire symétrique associée à q est l'application h telle que

$$\begin{aligned} h\big((x, y), (z, t)\big) &= \frac{q(x + z, y + t) - q(x, y) - q(z, t)}{2} \\ &= \frac{(x + z)^2 - (x + z)(y + t) - 2(y + t)^2 - x^2 + xy + 2y^2 - z^2 + zt + 2t^2}{2} \\ &= xz - yz - xt - 2yt \end{aligned}$$

et la matrice de q est

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

D'après la Proposition 4.9 la matrice d'une forme quadratique est une matrice symétrique.

4.3.1 Sous-espace orthogonale

Soit $\mathfrak{L}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Considérons une forme quadratique q et sa forme bilinéaire symétrique associée b. Similairement à ce qu'on a vue dans la Section 4.2.2, on dit que deux vecteurs $\ell, m \in \mathfrak{L}$ sont *orthogonaux* si $b(\ell, m) = 0$. De même, étant donné un sous-espace vectoriel $\mathfrak{M}$ de $\mathfrak{L}$, on appelle *orthogonal* de $\mathfrak{M}$ l'ensemble $\mathfrak{M}^\perp$ des vecteurs qui sont orthogonaux à tous vecteurs de $\mathfrak{M}$.

Proposition 4.30 *Soit $\mathfrak{M}$ un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{L}$. Alors $\mathfrak{M}^\perp$ est un sous-espace vectoriel.*

Preuve. (`Exercice`) ■

Malgré le fait que la définition d'orthogonalité est très semblable à celle vue dans le cas d'un produit scalaire, les résultats que l'on trouve ne sont pas les mêmes. Par exemple, dans le cas d'une forme quadratique en général les sous-espaces $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}^\perp$ ne sont pas supplémentaires, car on peut avoir des vecteurs non nuls qui appartient à l'intersection des deux.

L'orthogonal de $\mathfrak{L}$ est appelé le *noyau* de q et il est noté par $\mathrm{Ker}\,(q)$.

Le *rang* de q, noté $\mathrm{rg}\,(q)$, est l'entier

$$\mathrm{rg}\,(q) = \dim(\mathfrak{L}) - \dim(\mathrm{Ker}\,(q)).$$

Une forme quadratique est dite *non dégénérée* si son noyau est le sous-espace trivial $\{\vec{0}\}$, c'est-à-dire si son rang est égale à la dimension de l'espace.

De plus, on peut montrer que le rang d'une forme quadratique est égal au rang de sa matrice associée dans une base quelconque (`Exercice`) et qu'elle est non dégénérée si et seulement si sa matrice associée est inversible (`Exercice`).

Théorème 4.31 *Soit $\mathfrak{L}$ un espace vectoriel, $\mathfrak{M}$ un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{L}$ et q une forme quadratique non dégénérée sur $\mathfrak{L}$. Alors*

$$\dim(\mathfrak{L}) = \dim(\mathfrak{M}) + \dim(\mathfrak{M}^\perp).$$

4.3.2 Bases orthogonales

Soit q une forme quadratique sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathfrak{L}$ et b sa forme bilinéaire symétrique associée.

Une base $E = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de $\mathfrak{L}$ est dite *orthogonale* pour q si $b(e_i, e_j) = 0$ pour tout $i \neq j$.

La Proposition suivante suit facilement de la définition.

Proposition 4.32 *Une base de $\mathfrak{L}$ est orthogonale pour une forme quadratique q si et seulement si la matrice de q dans cette base est diagonale.*

Preuve. Il suffit de remarquer que la matrice de q dans une base orthogonale a la forme

$$\begin{pmatrix} q(e_1) & & & 0 \\ & q(e_2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & q(e_n) \end{pmatrix}.$$

■

Théorème 4.33 *Soit $\mathfrak{L}$ de dimension finie. Alors toute forme quadratique sur $\mathfrak{L}$ admet une base orthogonale.*

Une conséquence intéressante du théorème précédent est donnée dans le corollaire suivant.

Corollaire 4.34 (Décomposition en carrés) *Soit $\mathfrak{L}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et q une forme quadratique sur $\mathfrak{L}$. Alors ils existent des formes linéaires $g_1, g_2, \ldots, g_r \in \mathfrak{L}^*$ linéairement indépendantes sur $\mathfrak{L}^*$ et des scalaires $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{K}$ tels que*

$$q = \alpha_1 g_1^2 + \alpha_2 g_2^2 + \cdots + \alpha_r g_r^2.$$

De plus, pour toute décomposition de ce type on a $r = rg\,(q)$.

Si la forme quadratique est dégénérée, alors une base de $\mathrm{Ker}\,(q)$ peut être obtenue à partir des vecteurs e_i d'une base orthogonale tels que $q(e_i) = 0$. De plus, dans le cas réel, on peut donner le résultat suivant concernant les vecteurs d'une base qui ne sont pas dans le noyau.

Théorème 4.35 *Soit q une forme quadratique d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathfrak{L}$. Il existe un couple (s, t) d'entiers tel que pour toute base E de $\mathfrak{L}$ orthogonale pour la forme quadratique q on a*

$$s = Card\,(\{e \in E \mid q(e) > 0\}) \qquad et \qquad r = Card\,(\{e \in E \mid q(e) < 0\})\,.$$

Le couple dans le Théorème ci-dessus est dite la *signature* de la forme quadratique q. Remarquons que si (s, r) est la signature de q alors $\mathrm{rg}\,(q) = s + t$.

4.3.3 Classification des formes quadratiques

Soit $\mathfrak{L}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

Rappelons que deux matrices carrées $A, B \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ sont *congruentes* s'il existe une matrice inversible $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^\top A\, P$. La relation de congruence est une relation d'équivalence (`Exercice`).

Soient maintenant $q_1, q_2 : \mathfrak{L} \to \mathbb{K}$ deux formes quadratiques. On dit que q_1 et q_2 sont *équivalentes* s'il existe un automorphisme $f \in \mathrm{End}\,(\mathfrak{L})$ tel que $q_2 = q_1 \circ f$.

Proposition 4.36 *Deux formes quadratiques sont équivalentes si et seulement si les matrices associées aux deux formes dans une même base sont congruentes.*

Preuve. (`Exercice`). ∎

Dans la suite on va classifier les formes quadratique dans les cas complexe et dans le cas réel.

Théorème 4.37 *Soit q une forme quadratique sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n. Soit $r = rg(q)$. Alors il existe une base de l'espace vectoriel telle que la matrice associée à q dans cette base est*

$$\begin{pmatrix} I_{r\times r} & 0 \\ 0 & 0_{(n-r)\times(n-r)} \end{pmatrix}.$$

Donc, dans le cas complexe, deux formes quadratiques sont équivalentes si et seulement si elles ont le même rang.

Théorème 4.38 *Soit q une forme quadratique sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n. Soit (s,t) la signature de q. Alors il existe une base de l'espace vectoriel telle que la matrice associée à q dans cette base est*

$$\begin{pmatrix} I_{s\times s} & 0 & 0 \\ 0 & -I_{t\times t} & 0 \\ 0 & 0 & 0_{(n-s-t)\times(n-s-t)} \end{pmatrix}.$$

Donc, dans le cas réel, deux formes quadratiques sont équivalentes si et seulement si elles ont la même signature.