Examen Intra 1

Instructions.

1. Vous disposez de **1.5 heures** pour résoudre les problèmes suivants.
2. Il faut justifier toutes vos assertions clairement et proprement ; en particulier, il faut indiquer les résultats que vous utilisez.
3. Dans un problème en plusieurs parties, vous pouvez utiliser le résultat d'une partie précédente, même si vous ne l'avez pas résolu.

(10pts) **Problème 1.** Donner une démonstration complète de l'énoncé suivant.

Soit E un espace vectoriel et $\{v_1, \ldots, v_n\}$ des éléments linéairement <u>indépendants</u> de E. Si w est un élément de E tel que $\{v_1 + w, \ldots, v_n + w\}$ sont linéairement <u>dépendants</u>, alors

$$w \in \operatorname{vect}\{v_1, \ldots, v_n\}.$$

(6pts) **Problème 2.** Soit $\mathrm{Fon}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$, et

$$S = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \;\middle|\; f \text{ est constante sur l'intervalle } [0,1] \subseteq \mathbb{R} \right\}.$$

Vérifier que S est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{Fon}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$.

(6pts) **Problème 3.** Soit $L : \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par

$$L\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a+d \\ a-d \\ b-c \end{bmatrix}$$

pour tout $\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right] \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

a. Montrer que L est une application linéaire.

b. Calculer une base de $\ker(L)$.

c. Déterminer si L est injective.

(9pts) **Problème 4.** Pour chaque énoncé, déterminer s'il est vrai ou faux. Justifier les réponses.

a. Il existe une <u>unique</u> application linéaire T de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ tels que $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

b. Si $L : E \to E$ est une application linéaire, alors $\mathrm{im}(L) \cap \ker(L) = \{0\}$.

c. Si $S : E \to E$ est une symétrie, alors $\frac{1}{2}(S + \mathrm{Id}_E)$ est une projection.