Examen Intra 2

Instructions.

1. Vous disposez de **1.5 heures** pour résoudre les problèmes suivants.
2. Il faut justifier toutes vos assertions clairement et proprement ; en particulier, il faut indiquer les résultats que vous utilisez.

Problème 1. Soit $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par

$$L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+2y \\ x+y+z \\ x+2z \end{bmatrix} \qquad \text{pour tout } \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Calculer la matrice de L dans la base

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Problème 2. Soit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

a. Calculer les valeurs propres de A.

b. Calculer une base de chaque espace propre de A.

c. Si A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$, trouver une matrice P telle que $P^{-1}AP$ est diagonale.

Problème 3. Calculer la forme normale de Jordan de la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

(*Indice: une valeur propre est* -1)

Problème 4. Soit A une matrice réelle de format 8×8 telle que

(i) $p_A(x) = (x-4)^5(x-7)^3$

(ii) $m_A(x) = (x-4)^3(x-7)^2$

(iii) A possède au plus 4 vecteurs propres linéairement indépendants.

Déterminer la forme normale de Jordan de A.