

Feuille d'exercices 1

Rappel

Dans le cours on a vu la définition suivante d'un \mathbb{K} -espace vectoriel.

Un \mathbb{K} -*espace vectoriel* est la donnée :

- d'un ensemble E ,
- d'une application $E \times E \rightarrow E : (x, y) \mapsto x + y$ appelée *addition*,
- d'une application $\mathbb{K} \times E \rightarrow E : (\lambda, y) \mapsto \lambda y$ appelée *produit externe*,

qui satisfont aux huit axiomes suivants :

- (E1) $x + y = y + x$ pour tous $x, y \in E$; (commutativité de l'addition)
- (E2) $(x + y) + z = x + (y + z)$ pour tous $x, y, z \in E$; (associativité de l'addition)
- (E3) il existe un élément 0_E de E tel que $x + 0_E = x = 0_E + x$ pour tout $x \in E$; (existence de l'élément neutre)
- (E4) pour tout $x \in E$, il existe un élément $x' \in E$ tel que $x + x' = 0_E = x' + x$; (existence de l'opposé)
- (E5) $1x = x$ pour tout $x \in E$; (action de l'unité de \mathbb{K})
- (E6) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ et pour tout $x \in E$; (distributivité)
- (E7) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$ et pour tous $x, y \in E$; (distributivité)
- (E8) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ et pour tout $x \in E$. (associativité mixte)

Puis, on a montré les conséquences suivantes.

- (C1) L'élément neutre de E est unique; c'est-à-dire, il existe un et un seul élément 0_E de E vérifiant $x + 0_E = x = 0_E + x$ pour tout $x \in E$.
- (C2) L'opposé de tout élément de E est unique; c'est-à-dire, pour tout $x \in E$, il existe un et un seul élément x' de E vérifiant $x + x' = 0_E = x' + x$.
Notation : l'opposé de x est noté $-x$.
- (C3) On a $0_{\mathbb{K}}x = 0_E$ pour tout $x \in E$.
- (C4) $(-1)x = -x$ pour tout $x \in E$.

Espaces vectoriels

Exercice 1. Identifier les ensembles qui sont des espaces vectoriels sur le corps \mathbb{Q} :

- | | |
|--|---|
| a. l'ensemble des réels positifs \mathbb{R}^+ | e. $\{f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{N}\}$ |
| b. l'ensemble des nombres entiers \mathbb{Z} | f. $\{f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{Q}\}$ |
| c. l'ensemble des rationnels $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$
tels que $\text{pgcd}(p, q) = 1$ et $q \leq 17$ | g. $\{f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}\}$ |
| d. $\{p \in \mathbb{R}[x] : \deg(p) \leq 17\}$ | h. $\{f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} : f(1) = 0\}$ |
| | i. $\{f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} : f(0) = 1\}$ |

Exercice 2. Montrer les énoncés suivants en utilisant (E1)–(E8) et (C1)–(C4); justifier chaque étape, égalité, affirmation, etc., de la démonstration.

(C5) $\alpha 0_E = 0_E$ pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$.

(C6) Si $\alpha \in \mathbb{K}$ et $x \in E$ sont tels que $\alpha x = 0_E$, alors soit $\alpha = 0_{\mathbb{K}}$ soit $x = 0_E$.

Sous-espaces vectoriels

Exercice 3. Identifier l'ensemble F est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel E .

- $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + \pi = 0 \text{ et } x + 3\pi z = 0\}$
- $E = \mathbb{R}^2$ et $F = \{(x, y) \in E : x^2 = y\}$
- $E = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$ et $F = \{f \in E : f(-2) = 0\}$
- $E = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$ et $F = \{f \in E : f \text{ est dérivable}\}$
- $E = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$ et $F = \{f \in E : f \text{ est intégrable}\}$
- $E = \mathbb{R}[x]$ et $F = \{p \in E : \deg(p) = 3\}$
- $E = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$ et $F = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(-x) = f(x)\}$
- $E = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$ et $F = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(-x) = -f(x)\}$

Exercice 4. Donner une démonstration complète de l'énoncé suivant.

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel. Si F et F' sont des sous-espaces de E , alors l'intersection $F \cap F'$ est un sous-espace de E .

N'oublier pas :

- d'écrire une introduction qui précisez vos hypothèses et vos symboles ;
- d'expliquer ce que vous allez faire, et pourquoi il est suffisant ;
- d'écrire une conclusion résumant ce que vous avez fait ;
- de relire la démonstration pour vérifier que
 - le texte se lise facilement ;
 - toutes les variables et tous les symboles sont définis ;
 - les mathématiques sont correctes.

Indépendance linéaire

Exercice 5. Déterminer si les matrices sont linéairement indépendantes dans $\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.

a. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

d. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

e. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

f. $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$

Exercice 6. Considérons \mathbb{R} comme espace vectoriel sur \mathbb{Q} .

a. Est-ce que les éléments $1, \sqrt{2}, \sqrt{5}$ sont linéairement indépendants ?

b. Est-ce que les éléments $1, \sqrt{3}, \sqrt{12}$ sont linéairement indépendants ?

Exercice 7. Trouver une base de \mathbb{R}^4 qui contient les vecteurs $(1, 2, 3, 4)$ et $(4, 3, 2, 1)$.

Exercice 8. Montrer que les polynômes suivants sont linéairement indépendants dans $\mathbb{R}[x]$:

$$x + 4, \quad 4x^2 + 7x + 1, \quad 3x^2 + x.$$

Exercice 9. Trouver une base du sous-espace de $\mathbb{R}[x]$ engendré par les polynômes

$$x^3 + x^2 + x + 1, \quad x^2 + 1, \quad x^3 - x^2 + x - 1, \quad x^2 - 1.$$

Exercice 10. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, et x_1, \dots, x_n des éléments linéairement indépendants de E , où $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$.

a. Montrer que $x_i \neq 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.

b. Montrer que $x_i \neq x_j$ pour tous $i, j \in \{1, \dots, n\}$ tels que $i \neq j$.

c. Montrer que si S est un sous-ensemble de $\{x_1, \dots, x_n\}$, alors les éléments de S sont linéairement indépendants.