Feuille d'exercices 11

Exercice 1. Montrer que l'application suivante est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$:

$$\left\langle \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} \right\rangle = x_1x_2 + \frac{1}{2}x_1y_2 + \frac{1}{2}y_1x_2 + y_1y_2.$$

Exercice 2. On définit $N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par

$$N\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = |x_1| + |x_2|.$$

a. Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

b. Existe-t-il un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$ dont la norme associée est N ?

Exercice 3. Soit E un espace euclidien et $v \in E$, $v \neq 0$. Montrer que la norme de $\frac{v}{\|v\|}$ est 1.

Exercice 4. Soit u et v des éléments d'un espace euclidien. Montrer que

$$\langle u, v \rangle = \frac{\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2}{4}.$$

Exercice 5. Soit E un espace euclidien et $v_1, v_2, \ldots, v_m$ une famille de vecteurs non nuls telle que

$$\langle v_i, v_j \rangle = 0 \qquad \text{si } i \neq j.$$

Montrer que $v_1, v_2, \ldots, v_m$ sont linéairement indépendants.

Exercice 6. Soit E un espace vectoriel euclidien dont le produit scalaire est noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Montrer que si v est un élément non nul de E, alors

$$\{u \in E : \langle u, v \rangle = 0\}$$

est un sous-espace vectoriel de E de dimension $\dim(E) - 1$.

Exercice 7. Soit L un endomorphisme d'un espace euclidien E dont le produit scalaire est noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes.

(i) $\langle L(u), L(v) \rangle = \langle u, v \rangle$ pour tous $u, v \in E$.

(ii) $\|L(u)\| = \|u\|$ pour tous $u \in E$.

Exercice 8. Soit u et v des éléments d'un espace euclidien dont le produit scalaire est noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes.

(i) u et v sont orthogonaux.

(ii) $\|u\| \leq \|u + \alpha v\|$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 9. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} k a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} b_k^2\right).$$