Feuille d'exercices 12

Exercice 1.

a. Appliquer l'algorithme de Gram–Schmidt au vecteurs

$$\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}.$$

b. Appliquer l'algorithme de Gram–Schmidt au vecteurs

$$\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}.$$

Exercice 2. Appliquer l'algorithme de Gram–Schmidt au vecteurs

$$\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}.$$

Exercice 3. Soit $\mathbb{R}_2[x]$ l'espace euclidien des polynômes de degré au plus 2 dont le produit scalaire est donné par

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx.$$

Appliquer l'algorithme de Gram–Schmidt à la base $(1, x, x^2)$ de $\mathbb{R}_2[x]$ pour trouver une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[x]$.

Exercice 4. Calculer une base orthogonale du noyau de la matrice

$$\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}$$

Exercice 5. Soit

$$A = \begin{bmatrix}5&3&1\\3&3&3\\1&3&5\end{bmatrix}.$$

Trouver une matrice U telle que U^tAU est une matrice diagonale.

Exercice 6. Soit
$$A = \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 2 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$
Trouver une matrice U telle que U^tAU est une matrice diagonale.

Exercice 7. Soit $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont
$$\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} \quad \text{est un vecteur propre de } L \text{ pour la valeur propre} \quad 1,$$
$$\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix} \quad \text{est un vecteur propre de } L \text{ pour la valeur propre} \quad \frac{1}{2},$$
$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix} \quad \text{est un vecteur propre de } L \text{ pour la valeur propre} \ -\frac{1}{2}.$$
Calculer la matrice de L dans la base standard de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 8. Soit x, y, z des nombres réels strictement positifs. Montrer que
$$\frac{x+y+z}{2} \leq \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{x+y}.$$
(*Indice: inégalité de Cauchy–Schwarz*)

Exercice 9. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien, F un sous-espace vectoriel de E, et $F^\perp$ l'ensemble des éléments de E qui sont orthogonaux aux éléments de F :
$$F^\perp = \{e \in E : \langle e, f\rangle = 0 \text{ pour tout } f \in F\}$$

Remarque : par le même raisonnement que dans la solution d'exercice 6 de la feuille d'exercices 11, on a que $F^\perp$ est un sous-espace de E.

a. Montrer que $e \in F^\perp$ ssi e est orthogonal à tout élément d'une base de F.

b. Soit $(b_1, \ldots, b_n)$ est une base orthonormale de E dont les premiers m éléments forment une base de F :
$$\overbrace{\Big(\underbrace{b_1, b_2, \ldots, b_m}_{\text{base de } F}, b_{m+1}, b_{m+2}, \ldots, b_n\Big)}^{\text{base orthonormale de } E}$$
Montrer que $(b_{m+1}, b_{m+2}, \ldots, b_n)$ est une base de $F^\perp$.

c. Montrer que $E = F$ ssi $F^\perp = \{0\}$.