Feuille d'exercices 13

Exercice 1. Soit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \end{bmatrix}.$$

Trouver une matrice orthogonale U telle que U^tAU soit une matrice diagonale.

Exercice 2. Soit

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

a. Trouver une matrice orthogonale U telle que U^tAU soit une matrice diagonale.

b. Soit u_1 et u_2 les colonnes de la matrice U. Vérifier que

$$8u_1u_1^t + 3u_2u_2^t = A$$

c. Posons $P_1 = u_1u_1^t$ et $P_2 = u_2u_2^t$. Vérifier que

$$P_1^2 = P_1, \qquad P_2^2 = P_2, \qquad P_1P_2 = 0, \qquad P_2P_1 = 0.$$

d. Calculer la matrice de proj_{u_1} et proj_{u_2} dans la base standard ; comparer avec P_1 et P_2.

Exercice 3. Soit A une matrice réelle symétrique de format $n \times n$.

a. Montrer que si $\mathcal{B}$ est une base *orthonormale* de $\mathbb{R}^n$,
alors la matrice $[A]_{\mathcal{B}}$ de A dans la base $\mathcal{B}$ est aussi symétrique.

b. Donner un exemple d'une matrice réelle symétrique A est une base $\mathcal{B}$,
dont la matrice $[A]_{\mathcal{B}}$ n'est *pas* symétrique.

Exercice 4. Soit $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$ et B la matrice dont les colonnes sont les vecteurs $b_1, b_2, \ldots, b_n$:

$$B = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}.$$

a. Montrer que B est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base standard.

b. Montrer que B est inversible.

c. Montrer que $B^{-1} = B^t$ ssi $\mathcal{B}$ est une base *orthonormale*.

d. Soit D la matrice dont les colonnes sont obtenus de $\mathcal{B}$ par l'algorithme de Gram–Schmidt. Montrer que si B est triangulaire supérieure, D est triangulaire supérieure.