Feuille d'exercices 2

Exercice 1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace de E.

a. Montrer que $\dim(F) \leq \dim(E)$.

b. Montrer que si $\dim(F) = \dim(E)$, alors $F = E$.

c. Montrer que $\dim(E) = 0$ ssi E est l'espace vectoriel nul.

Exercice 2. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ des scalaires non nuls. Montrer que si $(b_1, \ldots, b_n)$ est une base de E, alors $(\alpha_1 b_1, \ldots, \alpha_n b_n)$ est une base de E.

Exercice 3. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 10, et F et G des sous-espaces de E tels que $\dim(F) = 8$ et $\dim(G) = 9$. Montrer que $\dim(F \cap G) \geq 7$. Donner un exemple pour montrer que l'égalité est possible.

Exercice 4.

a. Montrer que $S_1 = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : 2a - 2b - c = 0\}$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^3$ et trouver une base de S_1.

b. Montrer que $S_2 = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : 2a + b - c = 0 \text{ et } 2a - 3b - c - 0\}$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^3$ et trouver une base de S_2.

c. Déterminer si S_1 et S_2 sont des sous-espaces supplémentaires.

Exercice 5. Soit la matrice

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a. Montrer que l'ensemble

$$F = \{A \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R}) : AD = DA\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

b. Calculer une base et la dimension de F.

Exercice 6. Soit

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{et} \quad \mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & d \\ -d & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : d \in \mathbb{R} \right\}.$$

Montrer que $\mathcal{S}$ et $\mathcal{A}$ sont des sous-espaces supplémentaires de $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Exercice 7. Montrer que les ensembles suivants sont des bases de l'espace vectoriel de polynômes de degré au plus n et à coefficients réels.

a. $\{1, x, \ldots, x^n\}$

b. $\{1, (x-1), \ldots, (x-1)^n\}$

c. $\{x^{\underline{0}}, x^{\underline{1}}, x^{\underline{2}}, \ldots, x^{\underline{n-1}}\}$, où $x^{\underline{m}} = x(x-1)(x-2)\cdots(x-(m-1))$ et $x^{\underline{0}} = 1$

Exercice 8. Déterminer si les applications suivantes sont linéaires.

a. $f_1 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2, x_3, x_4)$.

b. $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_2(x) = x + 1$.

c. $f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f_3(x_1, x_2, x_3) = (-x_3, x_1, x_2)$.

d. $f_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f_4(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_2)$.

e. $f_5 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}^3$ définie par $f_5(a, b) = (a + ib, a - ib, b)$.

f. La composition de f_4 et f_5.