Feuille d'exercices 3

Exercice 1. On définit $L : \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4$ par

$$L\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a+b \\ a+c \\ a+d \\ b+c \end{bmatrix}$$

a. Montrer que L est une application linéaire.

b. Calculer $\ker(L)$.

c. Déterminer si L est une application injective.

d. Déterminer si L est une application surjective.

Exercice 2. On définit $L : \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ par

$$L\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} a+d & 0 \\ 0 & a+d \end{bmatrix}$$

a. Montrer que L est une application linéaire.

b. Montrer que $L \circ L = L$.

c. Montrer que $(\mathrm{Id}_E - L) \circ (\mathrm{Id}_E - L) = \mathrm{Id}_E - L$.

d. Calculer $\ker(L)$.

e. Calculer $\mathrm{im}(L)$.

f. Montrer que $\ker(L) \oplus \mathrm{im}(L) = \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Exercice 3. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $L : E \to E$ une application linéaire.

a. Montrer que si $v_1, v_2, \ldots, v_n \in E$ engendrent E, alors $L(v_1), L(v_2), \ldots, L(v_n)$ engendrent l'image de L.

b. Est-ce que le sous-espace engendré par $L(v_1), L(v_2), \ldots, L(v_n)$ coincident avec E ?

Exercice 4. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $L : E \to E'$ une application linéaire.

a. Montrer que si F est un sous-espace de E, alors $L(F)$ est un sous-espace de E' de dimension au plus $\dim(F)$.

b. Montrer que si F' est un sous-espace de E' qui est contenu dans l'image de L, alors $L^{-1}(F')$ est un sous-espace de E de dimension au moins $\dim(F')$.

c. Montrer que l'hypothèse « F' est contenu dans l'image de L » est nécessaire dans la partie précédente.

Exercice 5. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $L : E \to E$ une application linéaire telle que $L \circ L = L$.

a. Montrer que $E = \ker(L) \oplus \operatorname{im}(L)$.

b. Montrer que $\operatorname{im}(L) = \ker(\operatorname{Id}_E - L)$.

c. Montrer que $E = \ker(L) \oplus \ker(\operatorname{Id}_E - L)$.

d. Montrer que si $L' : E \to E$ est une application linéaire telle que $E = \ker(L') \oplus \ker(\operatorname{Id}_E - L')$, alors $L' \circ L' = L'$.

Exercice 6. *(Espace vectoriel produit)* Soit E et F deux espaces vectoriels. Dans cet exercice, on va munir le produit cartésien

$$E \times F = \Big\{(e, f) : e \in E \text{ et } f \in F\Big\}$$

d'une structure de espace vectoriel.

(somme) On définit la somme de deux éléments (e, f) et (e', f') de $E \times F$ comme

$$(e, f) + (e', f') = (e + e', f + f').$$

(produit externe) On définit la multiplication d'un élément (e, f) de $E \times F$ par un scalaire α comme

$$\alpha(e, f) = (\alpha e, \alpha f).$$

a. Calculer la somme suivante dans $\mathbb{R}^2 \times \operatorname{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$:

$$\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & \frac{2}{3} \\ -7 & 0 \end{bmatrix} \right) + \left(\begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{5} \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \right).$$

b. Calculer le produit externe suivant dans $\mathbb{R}^2 \times \operatorname{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$:

$$5\left(\begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{5} \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \right).$$

c. Montrer que $E \times F$ est un espace vectoriel.

d. Posons $E_0 = E \times \{0_F\}$ et $F_0 = \{0_E\} \times F$.
Montrer que E_0 et F_0 sont des sous-espaces supplémentaires de $E \times F$.

e. Montrer que si E et F sont de dimension finie, alors $\dim(E \times F) = \dim(E) + \dim(F)$.

f. Soit

$$E = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\} \qquad \text{et} \qquad F = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

On définit une application $L : E \times F \to E + F$ par $L\big((e, f)\big) = e + f$.
Montrer que L est une application linéaire. Est-ce que L est un isomorphisme ?

g. Soit S_1 et S_2 deux sous-espaces supplémentaires d'un espace vectoriel. Montrer que l'application $L : S_1 \times S_2 \to S_1 \oplus S_2$ définie par $L\big((u, v)\big) = u + v$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Expliciter l'inverse de L.