Feuille d'exercices 4

Exercice 1. Soit $\mathbb{R}_d[x]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus d et à coefficients réels. Montrer que si $p_0(x), p_1(x), \ldots, p_d(x) \in \mathbb{R}_d[x]$ satisfont $p_i(2) = 0$ pour tout $i \in \{0, 1, \ldots, d\}$, alors $p_0(x), p_1(x), \ldots, p_d(x)$ sont linéairement dépendants.

Exercice 2. Soit F_1 et F_2 des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. Montrer que si $\dim(E) = 9$ et $\dim(F_1) = \dim(F_2) = 5$, alors $F_1 \cap F_2 \neq \{0\}$.

Exercice 3. Soit F_1, F_2, et F_3 des sous-espace d'un espace vectoriel E de dimension finie. Montrer que

$$\dim(F_1 + F_2 + F_3) \leq \dim(F_1) + \dim(F_2) + \dim(F_3).$$

Exercice 4. Soit

$$v_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad v_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

a. Compléter v_1, v_2 pour former une base de $\mathbb{Q}^4$.

b. En utilisant la partie précédente, trouver un supplémentaire de $\operatorname{vect}\{v_1, v_2\}$.

Exercice 5. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[x]$ défini par $F = \{ax^2 + bx^5 : a, b \in \mathbb{R}\}$. Trouver un sous-espace supplémentaire de F.

Exercice 6. Soit

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : d \in \mathbb{R} \right\}$$

a. Montrer que $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) = M \oplus N$.

b. Calculer la projection sur M parallèlement à N.

c. Calculer la symétrie par rapport à M parallèlement à N.

Exercice 7. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie d. Montrer qu'il existe d sous-espaces $F_1, F_2, \ldots, F_d$ avec $\dim(F_i) = 1$ pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, d\}$ et $E = F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_d$.

Exercice 8. Soit $L : E \to E'$ une application linéaire entre $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies. Montrer qu'il existe un sous-espace X de E tel que

$$X \cap \ker(L) = \{0\} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{im}(L) = \{L(x) : x \in X\}\,.$$

(*Indice: Considérer un sous-espace supplémentaire.*)

Exercice 9.

a. Soit $A, B \in \mathrm{Mat}_{d\times d}(\mathbb{R})$ des matrices inversibles telles que $AB = -BA$.
Montrer que I_d, A, B, AB sont linéairement indépendants dans $\mathrm{Mat}_{d\times d}(\mathbb{R})$.
En déduire que $d^2 \geq 4$.

b ! *(Défi : généralisation de la partie précédente)* Soit $A_1, A_2, \ldots, A_m \in \mathrm{Mat}_{d\times d}(\mathbb{R})$ des matrices inversibles telles que $A_iA_j = -A_jA_i$ si $i \neq j$. Montrer que les matrices

$$A_1^{p_1} A_2^{p_2} \cdots A_m^{p_m} \text{ avec } p_i \in \{0,1\} \text{ pour tout } i \in \{1,2,\ldots,m\}$$

sont linéairement indépendants dans $\mathrm{Mat}_{d\times d}(\mathbb{R})$. En déduire que $d^2 \geq 2^m$.

Exercice 10. Notons par $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E dont la somme de $x, y \in E$ est notée $x + y$ et la multiplication de $x \in E$ et $\alpha \in \mathbb{K}$ est notée $\alpha \cdot x$. Fixons un élément $e \in E$.

On définit deux nouvelles opérations $\boxplus : E \times E \to E$ et $\boxdot : \mathbb{K} \times E \to E$ par

$$x \boxplus y = x + y - e \qquad\qquad \alpha \boxdot x = \alpha \cdot x + (1-\alpha)\cdot e$$

pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$ et pour tous $x, y \in E$.

a. Montrer que l'ensemble E muni de $\boxplus$ et $\boxdot$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, noté $(E, \boxplus, \boxdot)$.

b. Montrer que l'application $L : E \to E$ définie par $L(x) = x + e$ est une application linéaire de l'espace vectoriel $(E, +, \cdot)$ dans l'espace vectoriel $(E, \boxplus, \boxdot)$.

c. Montrer que L n'est pas une application linéaire de $(E, +, \cdot)$ dans $(E, +, \cdot)$ si $e \neq 0$.