# Feuille d'exercices 5

**Exercice 1.** Soit $E$ et $E'$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

*a.* Montrer que si $L : E \to E'$ est une application linéaire injective, et si $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sont des éléments linéairement indépendants dans $E$, alors $L(v_1), \ldots, L(v_n)$ sont des éléments linéairement indépendants dans $E'$.

*b.* Montrer que si $L : E \to E'$ est une application linéaire surjective, et si $u_1, u_2, \ldots, u_m$ sont des éléments dans $E$ qui engendrent $E$, alors $L(u_1), \ldots, L(u_m)$ sont des éléments des $E'$ qui engendrent $E'$.

*c.* Montrer que si $L : E \to E'$ est une application linéaire bijective, et si $(b_1, b_2, \ldots, b_d)$ est une base de $E$, alors $(L(b_1), L(b_2), \ldots, L(b_d))$ est une base de $E'$.

**Exercice 2.** Soit $E$ et $E'$ deux espaces vectoriels de dimension finie.

*a.* Montrer que s'il existe un isomorphisme $L : E \to E'$, alors $\dim(E) = \dim(E')$.

*b.* Montrer que si $\dim(E) = \dim(E')$, alors il existe un isomorphisme $L : E \to E'$.

**Exercice 3.** Supposons que $F$ et $G$ sont des sous-espaces supplémentaires d'un espace vectoriel $E$. Montrer que si $(f_1, \ldots, f_n)$ est une base de $F$ et si $(g_1, \ldots, g_m)$ est une base de $G$, alors $(f_1, \ldots, f_n, g_1, \ldots, g_m)$ est une base de $E$.

**Exercice 4.** Soit $P : E \to E$ une application linéaire telle que $P \circ P = P$.

*a.* Montrer que $\ker(P)$ et $\mathrm{im}(P)$ sont des sous-espaces supplémentaires de $E$.

(*Indice:* $e = (e - P(e)) + P(e)$)

*b.* Montrer que si la dimension de $E$ est finie, alors $E$ admet une $(b_1, \ldots, b_n)$ vérifiant

$$\begin{array}{rclrclcrcl} P(b_1) &=& b_1, & P(b_2) &=& b_2, & \ldots, & P(b_r) &=& b_r, \\ P(b_{r+1}) &=& 0, & P(b_{r+2}) &=& 0, & \ldots, & P(b_n) &=& 0, \end{array}$$

où $r = \dim(\mathrm{im}(P))$.