Feuille d'exercices 6

Exercice 1. Soit
$$F = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ x + 2y - z = 0 \right\} \quad \text{et} \quad G = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ \begin{array}{r} x + y = 0 \\ y + z = 0 \end{array} \right\}.$$

a. Montrer que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

b. Soit $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la projection sur F parallèlement à G.
Écrire la matrice $[P]$ de P dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et vérifier que $[P][P] = [P]$.

c. Soit $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la symétrie par rapport à F parallèlement à G.
Écrire la matrice $[S]$ de S dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et vérifier que $[S][S] = I_3$.

Exercice 2. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $L : E \to E$ une endomorphisme tel que $L^2 = L$. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de L prend la forme suivante.
$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 3. Soit $S : E \to E$ une application linéaire telle que $S \circ S = \mathrm{Id}_E$. Montrer qu'il existe une base $(b_1, \ldots, b_n)$ de E vérifiant
$$\begin{array}{llll} S(b_1) = b_1, & S(b_2) = b_2, & \ldots, & S(b_r) = b_r, \\ S(b_{r+1}) = -b_{r+1}, & S(b_{r+2}) = -b_{r+2}, & \ldots, & S(b_n) = -b_n, \end{array}$$
pour un certain entier $r \in \mathbb{N}$. (*Indice: voir l'exercice 4 de la Feuille d'Exercices 5*)

Exercice 4. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 3$. Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension $n-2$. Soit G un supplémentaire de F.

a. Montrer que la dimension de G est 2.

b. Soit (g_1, g_2) une base de G, f un élément de F et $G' = \mathrm{vect}\{g_1 + f, g_2 + f\}$.
Montrer que F et G' sont supplémentaires.

c. En déduire qu'il existe plusieurs sous-espaces supplémentaires de F.

Exercice 5. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $L : E \to E$ une application linéaire telle que $L^2 - 3L + 2\,\mathrm{Id}_E = 0$.

a. Montrer que L est une application linéaire bijective.

b. Montrer que pour tout $x \in E$, on a $L(x) - x \in \ker(L - 2\,\mathrm{Id}_E)$.

c. Montrer que $\ker(L - \mathrm{Id}_E)$ et $\ker(L - 2\,\mathrm{Id}_E)$ sont supplémentaires dans E.

Exercice 6. Soit $\mathrm{Fon}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$.

On définit $L : \mathrm{Fon}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2) \to \mathrm{Fon}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ par

$$L(f) = f \circ \delta - f(0),$$

où $\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie par

$$\delta(x) = \begin{cases} x, & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

a. Montrer que L est une application linéaire.

b. Calculer le noyau de L.