Exercices du cours 6
Algèbre linéaire 2

1. Montrer, sur une matrice M de taille 3×3, que son polynôme caractéristique est de la forme
$\lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_3$, avec $a_2 = -\mathrm{tr}(M)$ et $a_3 = -\det(M)$.

2. Généraliser l'exercice 1 pour une matrice $n \times n$:
$\lambda^n - \mathrm{tr}(M)\lambda^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(M)$.
Utiliser le développement de Laplace et le lemme 3 du cours.

3. Calculer le polynôme caractéristique de la matrice $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 10 & -5 & 7 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. Quels sont ses valeurs propres ?

4. Montrer que si $u, v \in \mathrm{End}(V)$, alors $u \circ v$ et $v \circ u$ ont les mêmes valeurs propres.

5. Soit $f \in \mathrm{Aut}(V)$, c'est-à-dire : f est un endomorphisme inversible de V (on dit que f est un <u>automorphisme</u> de V). Montrer que les valeurs propres de f sont non nulles et que si λ est valeur propre de V, alors λ^{-1} est valeur propre de f^{-1}.

6. Montrer que : $f \in \mathrm{End}(V)$ est inversible $\Longleftrightarrow$ 0 n'est pas valeur propre de V.

7. Montrer que $V = \mathbb{C}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 2. Soit $f : V \to V$, $f(z) = iz$.
Montrer que f n'a pas de valeur propre
(NB cette valeur propre serait dans $\mathbb{R}$!)