# Feuille d'exercice 8

**Exercice 1.** Soit $E$ l'espace des polynômes à coefficients réels de degré au plus 3 et $B$ la base monomiale de $E$. Soit

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Trouvez un endomorphisme $f \in \mathrm{End}(E)$ tel que $[f]_B = M$.

**Exercice 2.** Soit $E$ un espace de dimension finie $n$ sur un corps $\mathbb{K}$ et $M \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Démontrez que pour toute base $B$ de $E$, il existe un unique endomorphisme $f \in \mathrm{End}(E)$ tel que $M = [f]_B$.

**Exercice 3.** Soit $E$ un espace de dimension finie et $F_1, \ldots, F_n$ des sous-espaces de $E$. Démontrez que la somme $F_1 + \cdots + F_n$ est directe si et seulement si pour tout $j \in \{2, \ldots, n\}$,

$$(F_1 + \cdots + F_{j-1}) \cap F_j = 0.$$

**Exercice 4.** Soit les vecteurs de $\mathbb{R}^2$

$$u_1 = (-1, 1), \quad u_2 = (2, 3), \quad u_3 = (1, 0),$$

Montrez que $\mathbb{R}^2 = \mathrm{Vect}(u_1) + \mathrm{Vect}(u_2) + \mathrm{Vect}(u_3)$ et que $\mathrm{Vect}(u_i) \cap \mathrm{Vect}(u_j) = 0$ si $i \neq j$, mais qu'il ne s'agit pas d'une somme directe.

**Exercice 5.** Pour chacune des matrices, déterminez si elle est diagonalisable et, si c'est le cas, trouver une matrice qui permet de la diagonaliser.

*a.* $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

*b.* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

*c.* $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

*d.* $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

*e.* $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

*f.* $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

**Exercice 6.** Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ défini par

$$f(a, b, c, d) = (2a + b - c - d, b + d, b + c - d, 2d).$$

Les valeurs propres de $f$ sont $\mathrm{Spect}(f) = \{1, 2\}$ (vous n'avez besoin de le démontrer).

*a.* Trouvez une base de l'espace propre $\mathbb{R}^4(2)$. Quelle est sa dimension ?

*b.* Trouvez une base de l'espace propre $\mathbb{R}^4(1)$. Quelle est sa dimension ?

*c.* Trouvez un sous-espace de dimension 3 de $\mathbb{R}^4$ sur lequel la restriction de $f$ devient diagonalisable, et trouvez une base de cet espace.

**Exercice 7.** Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie, $p : E \to E$ une projection et $s : E \to E$ une symétrie.

*a.* Démontrez que $p$ est diagonalisable et que $\mathrm{Spect}(p) = \{0, 1\}$.

*b.* Démontrez que $s$ est diagonalisable et que $\mathrm{Spect}(s) = \{-1, 1\}$.

(*Indice* : utilisez les exercices 2 et 3 de la feuille 6.)

**Exercice 8.** Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$. Le *dual de $E$* est l'espace vectoriel

$$E^* = \{\eta : E \to \mathbb{K} \mid f \text{ est linéaire } \}.$$

Soit $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ une base de $E$, on définit pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$ l'application

$$\begin{array}{rrcl} b_j^* : & E & \to & \mathbb{K} \\ & \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i & \mapsto & \alpha_j \end{array}$$

*a.* Démontrez que $b_j^* \in E^*$ pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$.

*b.* Démontrez que l'ensemble $B^* = \{b_j^* \mid 1 \leq j \leq n\}$ est une base de $E$. On appelle $B^*$ la *base duale de $B$*. Que pouvez-vous dire sur les coordonnées de $\eta \in E^*$ dans la base $B^*$ ?

*c.* Déduisez que $E$ et $E^*$ sont isomorphes.

**Exercice 9** (*Défi*)**.** Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$, $B$ une base de $E$ et $B^*$ sa base duale (voir l'exercice 8). Soit $f \in \mathrm{End}(E)$.

*a.* Démontrez que la règle $f^*(\eta)(u) = \eta(f(u))$ définit un endomorphisme $f^* : E^* \to E^*$.

*b.* Calculez $[f^*]_{B^*}$ et déduisez que $f$ et $f^*$ ont le même polynôme caractéristique. Déduisez aussi que $f$ est diagonalisable si et seulement si $f^*$ est diagonalisable.

*c.* En utilisant le problème *b*, démontrez que $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$.