Feuille d'exercices 9

Exercice 1. Posons

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix}.$$

a. Calculer le polynôme caractéristique de A.

b. Calculer le polynôme minimal de A.

c. En déduire que A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

d. Exprimer l'inverse de la matrice A comme combinaison linéaire de $I_3, A, A^2, A^3, \ldots$

e. Montrer que A^n est de la forme $\alpha A + \beta I_3$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 2. Posons

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & -6 & -9 \\ -4 & -1 & 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

a. Calculer le polynôme caractéristique de A.

b. Calculer le polynôme minimal de A.

c. Est-ce que A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$? triangularisable sur $\mathbb{R}$?

Exercice 3. Soit A une matrice dont la somme des coefficients dans chaque ligne est 1 :

$$a_{i1} + a_{i2} + \cdots + a_{in} = 1 \qquad \text{pour tout } 1 \leq i \leq n.$$

Montrer que 1 est une valeur propre de A.

Exercice 4. Soit L et K deux endomorphismes d'un espace vectoriel E tels que $L \circ K = K \circ L$.

a. Montrer que si v est un vecteur propre de L, alors $K(v)$ est aussi un vecteur propre de L.

b. En déduire que tout espace propre de L est stable pour l'action de K.

Exercice 5. Soit L un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie.

a. Montrer que si $\dim(E) = 3$, alors E possède un sous-espace stable par L de dimension 1 *et* un sous-espace stable par L de dimension 2.

b. Montrer que si $\dim(E) \geq 4$, alors E possède un sous-espace stable par L de dimension 1 *ou* 2.

Exercice 6. Soit A une matrice réelle 3×3 telle que
$$A\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}, \qquad A\begin{bmatrix}1\\2\\-3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\2\\-3\end{bmatrix}, \qquad A^3 = A, \qquad A^2 \neq A.$$

a. Montrer que 0, 1 et -1 sont des valeurs propres de A.

b. Calculer trace(A), det(A), et trace(A^{2018}).

Exercice 7. Soit A une matrice réelle 3×3 telle que $A^3 = I_3$ et $A \neq I_3$.

a. Déterminer les valeurs propres de A. (*Indice: polynôme minimal*)

b. Déterminer si A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

c. Déterminer si A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

Exercice 8. Calculer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de la matrice
$$A = \begin{bmatrix}0 & 0 & \alpha\\1 & 0 & \beta\\0 & 1 & \gamma\end{bmatrix}.$$

(*Indice: ils sont du même degré*)

Exercice 9. Soit A une matrice symétrique à coefficients dans $\mathbb{R}$. Montrer que la somme des carrées des entrées de A coïncide avec la somme des carrées des valeurs propres de A.

Autrement dit, si les entrées de A sont notées a_{ij} avec $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, et si les valeurs propres de A sont notées $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, montrer que
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2.$$

(*Indice: Considérer la trace de la matrice A^tA*)

Exercice 10. Soit A une matrice dans $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ dont toutes les valeurs propres sont *nulles*.

a. Montrer que si A est symétrique, alors $A = 0$.

b. Est-ce vrai si A n'est pas symétrique ?