Devoir 1

à remettre le 1 février 2019

Exercice 1. Donner une démonstration *complète* de l'énoncé suivant.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $x, y, z \in E$. Montrer que si x, y, z sont linéairement indépendants, alors $x+y, y+z, x+z$ sont linéairement indépendants.

N'oublier pas :

- ☐ d'écrire une introduction qui précise vos hypothèses et vos symboles ;
- ☐ d'expliquer ce que vous allez faire, et pourquoi il est suffisant ;
- ☐ d'écrire une conclusion résumant ce que vous avez fait ;
- ☐ de relire la démonstration pour vérifier que : le texte se lise facilement ; toutes les variables et tous les symboles sont définis ; les mathématiques sont correctes.

Exercice 2. Rappelons que $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ est l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des matrices de format 2×2 à coefficients dans $\mathbb{R}$. Considérons les deux sous-ensembles suivants de $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$:

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & -a-b \\ 0 & a \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} c & 0 \\ d & -c \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

a. Vérifier que M est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. *($N$ est également un sous-espace vectoriel de $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, mais il n'est pas nécessaire de le montrer.)*

b. Trouver une base de M, une base de N, une base de $M + N$ et une base de $M \cap N$.

c. Montrer que tout élément de $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ s'exprime de façon *unique* comme la somme d'un élément de M et d'un élément de N.

Exercice 3. Pour chaque énoncé, déterminer s'il est vrai ou faux. Justifier les réponses.

a. Considérons $\mathbb{C}^3$ comme espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. Alors, $\operatorname{vect}\left\{ \begin{bmatrix} i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i \\ i \\ -1 \end{bmatrix} \right\} = \mathbb{C}^3$.

b. Il existe une application linéaire T de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad T\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad T\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

c. Il existe une <u>unique</u> application linéaire T de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ tels que $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.