Devoir 2

à remettre le 12 mars 2019

Exercice 1. Soit $L : \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire dont la matrice dans les bases

$$\mathcal{B} = \left\{1 - x^2, 2x, 1 + 2x + 3x^2\right\} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{B}' = \left\{\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}\right\}$$

est

$$[L]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix}2 & -1 & 3\\3 & 1 & 0\end{bmatrix}.$$

a. Déterminer la matrice de passage de la base $\mathcal{B}'$ à la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

b. Déterminer la matrice de passage de la base canonique $\{1, x, x^2\}$ de $\mathcal{P}_2$ à la base $\mathcal{B}$.

c. Déterminer la matrice de L dans les bases canoniques de $\mathcal{P}_2$ et $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2. Soit $T : \mathrm{Mat}_{2\times2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ et $L : \mathrm{Mat}_{2\times2}(\mathbb{R}) \to \mathrm{Mat}_{2\times2}(\mathbb{R})$ les applications linéaires définies par

$$T\left(\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}\right) = a + d \qquad \text{et} \qquad L\left(\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}2a+d & a+b+d\\a+c+d & -2a-d\end{bmatrix}$$

pour toute matrice $\left[\begin{smallmatrix}a & b\\c & d\end{smallmatrix}\right] \in \mathrm{Mat}_{2\times2}(\mathbb{R})$.

a. Trouver une base de $\ker(T)$. Noter les éléments de la base B_1, B_2, B_3.

b. Montrer que $\ker(T) = \mathrm{im}(L)$.

(*Indice: pour l'inclusion* $\subseteq$, *calculer* $L(M) - M$ *pour* $M \in \ker(T)$)

c. Calculer $L(B_4)$ pour $B_4 = \left[\begin{smallmatrix}1 & 1\\1 & -2\end{smallmatrix}\right]$; en déduire que (B_4) est une base de $\ker(L)$.

d. Écrire la matrice de L dans la base $\mathcal{B} = (B_1, B_2, B_3, B_4)$ de $\mathrm{Mat}_{2\times2}(\mathbb{R})$.

e. Montrer que $\ker(T)$ et $\ker(L)$ sont des sous-espaces supplémentaires de $\mathrm{Mat}_{2\times2}(\mathbb{R})$.

Exercice 3. Soit $L : E_0 \to E_1$ et $K : E_1 \to E_2$ des applications linéaires entre des espaces vectoriels de dimension finie. En complétant les étapes suivantes, vous allez démontrer :

$$\dim(\ker(K \circ L)) \leq \dim(\ker(L)) + \dim(\ker(K)).$$

L'idée est d'appliquer le théorème de rang à une application linéaire H dont l'ensemble de définition est $\ker(K \circ L)$; dans ce cas on aura $\dim(\ker(K \circ L)) = \dim(\ker(H)) + \dim(\mathrm{im}(H))$.

a. On définit $H : \ker(K \circ L) \to E_2$ par $H(v) = L(v)$ pour tout $v \in \ker(K \circ L)$.
Montrer que $\ker(L) = \ker(H)$. *(Noter qu'il faut montrer que* $\ker(L) \subseteq \ker(K \circ L)$.*)*

b. Montrer que $\mathrm{im}(H) \subseteq \ker(K)$.

c. En déduire que $\dim(\ker(K \circ L)) \leq \dim(\ker(L)) + \dim(\ker(K))$.