# Devoir 3

à remettre le 9 avril 2019

**Exercice 1.** Soit $\mathcal{P}_2$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de la variable $x$ de degré au plus 2. On définit $L : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ par

$$L(a + bx + cx^2) = (b + 2c) + (2a + 3b)x + (4b + 5c)x^2$$

pour tout polynôme $a + bx + cx^2 \in \mathcal{P}_2$.

*a.* Calculer le polynôme caractéristique de $L$.
*b.* Calculer le polynôme minimal de $L$.
*c.* Calculer les valeurs propres de $L$ et leurs multiplicités.
*d.* Calculer un base de chaque espace propre de $L$.
*e.* Si $L$ est diagonalisable, trouver une base dans laquelle la matrice de $L$ est diagonale ; sinon, trouver une base dans laquelle la matrice de $L$ est triangulaire supérieure.

**Exercice 2.** Soit $A$ une matrice carrée à coefficients réelles telle que

$$A^3 - 3A^2 - A + 3I_n$$

est la matrice nulle.

*a.* Montrer que $A$ est une matrice diagonalisable. (*Indice: polynôme minimal*)
*b.* Montrer que les valeurs propres de $A$ sont 1, $-1$ ou 3.
*c.* Est-ce que $A$ est nécessairement inversible ?

**Exercice 3.** Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie, et $L$ et $K$ deux endomorphismes de $E$ tels que

($i$) $L$ possède $\dim(E)$ valeurs propres distinctes, et
($ii$) tout vecteur propre de $L$ est aussi un vecteur propre de $K$.

Montrer que $L \circ K = K \circ L$.

(*Indice: Considérer une base de $E$ qui consiste de vecteurs propres de $L$.*)