Algèbre linéaire 1

Christophe Reutenauer
Laboratoire de combinatoire et d'informatique mathématique,
Université du Québec à Montréal

12 décembre 2018

Table des matières

Remerciements : Benjamin Blanchette, Christophe Hohlweg, Anissa Amroun.

1 Introduction

Les sections 2, 3 et 8, sauf 8.2, sont déjà vues au CEGEP (voir le livre [1]). On peut les omettre, en tout cas les parcourir rapidement.

Nous notons $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

2 Système d'équations linéaires : résolution par la méthode d'élimination des variables, ou de substitution

Cette méthode est peut-être la plus naturelle. On choisit une des variables du système, on l'exprime en fonction des autres en utilisant une des équations ; puis on remplace dans toutes les autres équations cette variable par l'expression obtenue. Cela donne un nouveau système, avec moins de variables, et moins d'équations ; il se peut que des équations soient identiques, auquel cas on supprime les équations redondantes. On continue jusqu'à obtenir des variables sujettes à aucune équation : elles sont *libres*. En remontant le calcul à l'envers, on exprime toutes les variables non libres en fonctions des variables libres ; celle-ci peuvent prendre des valeurs arbitraires, et ça donne pour chaque choix une solution du système. Il y a alors une infinité de solutions, qui sont paramétrisées par les variables libres.

Il peut arriver qu'on ne trouve aucune variable libre : il y aura alors une solution unique.

Il peut arriver aussi qu'on arrive à une équation contradictoire (comme 0=1), et dans ce cas le système n'a aucune solution.

Ces trois alternatives, qui sont les seules possibles, sont illustrées dans les trois exemples très simples suivants.

Exemple 2.1.

$$a + 2b - c + 3d = 0,\ 2a - b - c - 2d = 0,\ 3a + b - 2c + d = 0.$$

Exprimons c en fonction des autres variables, en utilisant la première équation : $c = a + 2b + 3d$. Remplaçons c par l'expression $a + 2b + 3d$ dans les autres équations : $2a-b-a-2b-3d-2d = 0$, $3a+b-2a-4b-6d+d = 0$. Ces deux équations se simplifient toutes les deux en la même équation $a - 3b - 5d = 0$. Celle-ci permet d'exprimer a : $a = 3b + 5d$. Il n'y a plus d'autres équations ; les variables libres sont b et d.

On remonte : $c = a + 2b + 3d = 3b + 5d + 2b + 3d = 5b + 8d$. On obtient donc

$$a = 3b + 5d, c = 5b + 8d,$$

avec des valeurs arbitraires pour b et d. Il y a une infinité de solutions.

Exemple 2.2.

$$x + 3y = 8, 3x + y = 0.$$

Exprimons y en fonction de x avec la deuxième équation : $y = -3x$. Reportons y dans la première : $x + 3(-3x) = 8$, c'est-à-dire $-8x = 8$. Donc $x = -1$ et en remontant : $y = -3(-1) = 3$. Solution unique :

$$x = -1, y = 3.$$

Exemple 2.3.

$$u - v = 1, u + v + w = 2, 2u + w = 0.$$

Avec la première équation $u = v + 1$. Reportons u dans les autres : $v+1+v+w = 2$, $2(v+1)+w = 0$. Ça se réécrit $2v+w = 1$, $2v+w = -2$. On peut déjà voir qu'il n'y aura pas de solutions. Mais soyons plus systématique : en utilisant $2v + w = 1$, on obtient $w = -2v + 1$. Reportons dans la dernière équation : $2v + (-2v + 1) = -2$, ce qui se réécrit en $1 = -2$. Il n'y a pas de solution.

Exercice 2.1. *Résoudre :* $x + 2y = 4, 3x + 7y = 2.$

Exercice 2.2. *Résoudre :* $2x + 3y - 2z = 7, x - y - z = 1, 3x + 2y - 3z = 8.$

Exercice 2.3. *Résoudre :* $2a + 3b + 4c = 4, a - b + c = 1, 3a + 2b + 5c = 8.$

Exercice 2.4. *Résoudre :* $i + j + k + l = 0, i + j + k - l = 4, i + j - k + l = -4, i - j + k + l = 2.$

3 Matrices

3.1 Définitions (rappels)

Nous notons $M_{np}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de taille $n \times p$ sur $\mathbb{R}$. Une telle matrice a donc n lignes et p colonnes. On note une telle matrice $[a_{ij}]_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$, où a_{ij} désigne le coefficient (ou élément) en position i, j (ligne i, colonne j) de la matrice. On note la matrice aussi plus simplement $[a_{ij}]$ si aucune confusion n'est à craindre.

Une matrice-ligne (resp. matrice-colonne) est un élément de $M_{1p}(\mathbb{R})$ (resp. $M_{n1}(\mathbb{R})$). Nous écrirons aussi $\mathbb{R}^p$ pour $M_{1p}(\mathbb{R})$.

Les lignes d'une matrice sont des matrices-lignes. Les colonnes d'une matrice sont des matrices-colonnes.

Deux matrices sont égales si elles ont la même taille et si pour tous i, j leur élément en position i, j sont égaux.

La matrice nulle de taille $n \times p$ est la matrice dont tous les coefficients sont nuls. On la note 0_{np} et plus souvent simplement 0 (c'est ce qu'on appelle un *abus de notation*).

Une *matrice carrée d' ordre* n est un élément de $M_n(\mathbb{R}) = M_{nn}(\mathbb{R})$. Les éléments diagonaux d'une matrice carrée $[a_{ij}]$ sont les éléments a_{ii}. On appelle diagonale d'une matrice les positions des éléments diagonaux. Une matrice carrée $[a_{ij}]$ est dite *triangulaire supérieure* (resp. *inférieure*) si pour tous i, j, $i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$ (resp. $i < j \Rightarrow a_{ij} = 0$). Une matrice diagonale est une matrice qui est triangulaire à la fois supérieure et inférieure ; autrement dit, les éléments d'une matrice diagonale, qui sont en dehors de la diagonale, sont nuls.

Ce vocabulaire est très intuitif : voici des exemples de matrice triangulaire supérieure, triangulaire inférieure, diagonale (de gauche à droite) :

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

On note I_n (ou simplement I) la matrice carrée d'ordre n, qui est diagonale, avec des des 1 comme éléments diagonaux. On l'appelle la matrice identité d'ordre n.

La *transposée* d'une matrice $A = [a_{ij}]$, de taille $n \times p$, est la matrice, notée A^t, de taille $p \times n$, telle que son élément en ligne i, colonne j, est l'élément de A en colonne j, ligne i. Ecrivant $A^t = [b_{ij}]$, ceci s'exprime par

$$b_{ij} = a_{ji}.$$

3.2 Matrices : somme et produit externe

La somme de deux matrices $[a_{ij}]$ et $[b_{ij}$ de même taille est la matrice $[c_{ij}]$, de même taille, dont les coefficients sont définis par $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. Le *produit externe* d'un réel r par la matrice $[a_{ij}]$ est la matrice $[a_{ij}]$ dont les coefficients sont définis par $a_{ij} = ra_{ij}$. Par exemple

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+p & b+q \\ c+r & d+s \end{bmatrix}, \ r \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ra & rb \\ rc & rd \end{bmatrix}.$$

Ces deux opérations jouissent des propriétés suivantes : quelles que soient les matrices de même taille X, Y, Z et les réels a, b :

1. $X + Y = Y + X$ (commutativité de la somme) ;
2. $(X + Y) + Z = X + (Y + Z)$ (associativité de la somme) ;
3. $X + 0 = 0$ (0 est élément neutre pour l'addition) ;
4. Il existe une matrice X' telle que $X + X' = 0$ (existence de la matrice opposée) ;
5. $1X = X$ (le produit externe de $1 \in \mathbb{R}$ avec X est égal à X) ;
6. $(a + b)X = aX + bX$ (distributivité) ;
7. $a(X + Y) = aX + aY$ (distributivité) ;
8. $(ab)X = a(bX)$ (associativité).

L'associativité de la somme permet d'omettre les parenthèses : on écrit $A + B + C$ au lieu de $(A + B) + C$. Plus généralement, $A_1 + \ldots + A_k$ désigne la somme des ces k matrices (de même taille !) avec n'importe quel parenthésage.

Soient $A_1, \ldots, A_k \in M_{np}(\mathbb{R})$ et $a_1, \ldots, a_k \in R$. On appelle $a_1A_1 + \cdots + a_kA_k$ une *combinaison linéaire* des matrices $A_1, \ldots A_k$. Les a_i s'appellent les *coefficients* de cette combinaison linéaire ; plus précisément a_i est le coefficient de A_i.

S'il existe une combinaison linéaire telle que $a_1A_1 + \cdots + a_kA_k = 0$ et que les coefficients a_i ne sont pas tous nuls, on dit que les matrices $A_1, \ldots, A_k$ sont *linéairement dépendantes.*

Exercice 3.1. *Calculer la combinaison linéaire dans $M_2(\mathbb{R})$:*

$$x \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{y+z}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \frac{z-y}{2} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3.3 Produit de matrices

Soient $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}]$ des matrices de tailles respectives $n \times p$ et $p \times q$ (le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B). Le produit AB de ces deux matrices est la matrice $C = [c_{ij}]$, de taille $n \times q$ (le nombre de lignes de C est égal au nombre de lignes de A et son nombre de colonnes à celui de B), est défini par :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{k=p} a_{ik}b_{kj}.$$

Notez que cela s'exprime aussi comme suit :

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj}.$$

Le produit des matrices jouit des propriétés suivantes : soient $A, A' \in M_{np}(\mathbb{R})$, $B \in M_{pq}(\mathbb{R})$, $C \in M_{qr}(\mathbb{R})$, on a :

1. $(AB)C = A(BC)$ (associativité du produit)
2. $(A + A')B = AB + A'C$ (distributivité) ;
3. $A(B + B') = AB + AB'$ (distributivité) ;
4. $I_nA = A$, $BI_p = B$ (élément neutre pour le produit) ;
5. $a(AB) = (aA)B = A(aB)$;

Comme pour l'addition, l'associativité permet d'omettre les parenthèses : on écrit simplement ABC au lieu de $(AB)C$. Plus généralement $A_1 \cdots A_k$ désigne le produit de ces k matrices, avec n'importe quel parenthésage.

Comme conséquence immédiate de la formule du produit de deux matrices, on note que le produit d'une matrice nulle par une matrice quelconque, à gauche ou à droite est toujours une matrice nulle.

Pour un entier naturel $k > 0$, on définit la puissance k-ème d'une matrice carrée $A \in M_n(\mathbb{R})$: $A^n = AA \cdots A$, avec n facteurs A.

Proposition 3.1. *La transposée d'un produit est égal au produit des transposées dans l'autre sens.*

La preuve est laissée en exercice.

Exercice 3.2. *Trouver des matrices A et B telles que $AB \neq BA$.*

Exercice 3.3. *Calculer le cube de la matrice* $\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Exercice 3.4. *Calculer la puissance n-ème de la matrice* $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Exercice 3.5. *Calculer la puissance n-ème de la matrice* $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ *($n \geq 1$). Indication : essayer avec $n = 1, 2, 3$, deviner une formule générale et la prouver par récurrence sur n.*

Exercice 3.6. *Soit $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Montrer que $M^2 - (a + d)M + (ad - bc)I_2 = 0$.*

Exercice 3.7. *Soit* $L = (a_1, \ldots, a_n)$ *une matrice ligne et* M *une matrice de taille* $n \times p$ *dont les lignes sont* $L_1, \ldots, L_n$. *Montrer que* LM *est la matrice-ligne égale à la combinaison linéaire* $a_1 L_1 + \cdots + a_n L_n$.

Exercice 3.8. *Enoncer un analogue du résultat de l'exercice précédent avec une matrice-colonne et avec les colonnes d'une matrice.*

Exercice 3.9. *La* trace *d'une matrice carrée* M*, notée* $\mathrm{Tr}(M)$*, est la somme de ses éléments diagonaux. a) Montrer que si* $A \in M_{np}(\mathbb{R})$ *et* $B \in M_{pn}(\mathbb{R})$*, alors* AB *et* BA *sont des matrices carrées et* $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$. *b) Montrer qu'il n'existe pas de matrices* $A, B \in M_n(K)$ *telles que* $AB - BA = I_n$ *(*$n \geq 1$*).*

Exercice 3.10. *Montrer que si* M *est une matrice, alors* MM^t *est une matrice carrée, dont la trace est égale à la somme des carrés de tous les coefficients de* M.

Exercice 3.11. *Soit* A *une matrice carrée et* k *un entier naturel* > 0. *Montrer par récurrence sur* k *que* $(I - A)(I + A + A^2 + \cdots + A^k) = I - A^{k+1}$. *En déduire que si* A *est* nilpotente *(c'est-à-dire : il existe une puissance de* A *qui est nulle), alors* $I - A$ *est inversible à droite ; de manière analogue, qu'elle est inversible à gauche.*

Exercice 3.12. *Soient* A, B *des matrices triangulaires supérieures d'ordre* n*, dont les éléments diagonaux sont repectivement* $a_1, \ldots, a_n$ *et* $b_1, \ldots, b_n$. *Montrer que les éléments diagonaux de la matrice* AB *sont* $a_1 b_1, \ldots, a_n b_n$.

Exercice 3.13. *Soient* A, B *des matrices carrées de même taille. Montrer que la formule du binôme* $(A + B)^n = \sum_{i=1}^{i=n} \binom{n}{i} A^i B^{n-i}$ *est vraie si* $AB = BA$. *Montrer par un contre-exemple qu'elle n'est pas vraie en général (*$n = 2$ *suffira).*

3.4 Matrices inversibles

Définition 3.1. *Une matrice carrée* A *d'ordre* n *est dite* inversible à gauche *(resp.* inversible à droite*) s'il existe une matrice de même taille* B *(resp.* C*) telle que* $BA = I_n$ *(resp.* $AC = I_n$*).*

Elle est dite inversible *s'il existe* B *telle que* $AB = BA = I_n$.

Proposition 3.2. *Si une matrice a un inverse à gauche et un inverse à droite, alors ces inverses sont égaux et la matrice est inversible.*

Démonstration. Par hypothèse, $BA = I = AC$. Il suffit de montrer que $B = C$. On a : $B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C$. □

Il découle de cette proposition que si l'inverse d'une matrice A existe, cette matrice inverse est unique. On note A^{-1} l'inverse de la matrice A.

Proposition 3.3. *Soient $A_1, \ldots, A_k$ des matrices carrées de même taille, inversibles. Alors leur produit est inversible et $(A_1 \cdots A_k)^{-1} = A_k^{-1} \cdots A_1^{-1}$.*

Autrement dit, l'inverse d'un produit de matrices inversibles est leur produit, mais dans l'autre sens.

Démonstration. Ça se prouve par récurrence sur k. Si $k = 1$, il n'y a rien à prouver. Supposons que le résultat soir vrai pour k et déduisons-en qu'il est vrai pour $k+1$. Soient $A_1, \ldots, A_{k+1}$ des matrices carrées inversibles de même taille. Par hypothèse de récurrence, $A_1 \cdots A_k$ est inversible et son inverse est $A_k^{-1} \cdots A_1^{-1}$. On donc $(A_1 \cdots A_k)(A_k^{-1} \cdots A_1^{-1}) = I$. On en déduit que $(A_1 \cdots A_{k+1})(A_{k+1}^{-1} \cdots A_1^{-1}) = (A_1 \cdots A_k)A_{k+1}A_{k+1}^{-1}(A_k^{-1} \cdots A_1^{-1}) = (A_1 \cdots A_k)I(A_k^{-1} \cdots A_1^{-1}) = (A_1 \cdots A_k)(A_k^{-1} \cdots A_1^{-1}) = I$. □

Proposition 3.4. *Si une matrice est inversible, sa transposée l'est aussi et l'inverse de la transposée est la transposée de l'inverse.*

La preuve est laissée en exercice.

Exercice 3.14. *Soient A, B des matrices carrées de même taille. Montrer que si AB est inversible à droite, alors A est inversible à droite.*

Exercice 3.15. *Montrer que si A est une matrice inversible à droite et B une matrice telle que $BA = 0$, alors $B = 0$.*

Exercice 3.16. *Soit*

$$R(t) = \begin{bmatrix} e^t & 2te^t & (t^2-4)e^t & 2+2(t-1)e^t \\ 0 & e^t & te^t & e^t-1 \\ 0 & 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Montrer que $R(t+s) = R(t)R(s)$ pour tous nombres réels t et s. b) Quelle est l'inverse de $R(t)$?.

Exercice 3.17. *Montrer que si deux matrices carrées A, B commutent (c'est-à-dire $AB = BA$), et si elles sont inversibles, alors A et B^{-1} commutent, ainsi que A^{-1} et B^{-1}.*

Exercice 3.18. *Soient $A \in M_n(\mathbb{R})$, On suppose que A et $I_n + A$ sont inversibles. a) Montrer que $I_n + A^{-1}$ a pour inverse $A(I_n+A)^{-1}$. b) Montrer que $(I_n + A^{-1})^{-1} + (I_n + A)^{-1} = I_n$.*

Exercice 3.19. *Montrer que si une matrice carrée A satisfait $A^2 = A$, alors $I - A$ n'est pas inversible, sauf si $A = 0$.*

Exercice 3.20. *Soit J la matrice $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Calculer J^2 et $(I - J)J$. En déduire que les matrices J et $I - J$ ne sont pas inversibles.*

Exercice 3.21. *Montrer que si A, P sont des matrices carrées de même taille, et si P est inversible, alors $\mathrm{Tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{Tr}(A)$. Utiliser l'exercice 3.9.*

Exercice 3.22. *On suppose que A est une matrice carrée non nulle telle que $A^2 = A$. Pour $r, s \in R$, montrer que $(I+rA)(I+sA) = (I+sA)(I+rA)$ est une combinaison linéaire de I et A. En déduire que $I + rA$ est inversible sauf si $r = -1$.*

3.5 Système d'équations linéaires de Cramer

Définition 3.2. *Le système d'équations linéaires $AX = B$, où A est une matrice inversible d'ordre n, où $X = (x_1, \dots, x_n)^t$ est une matrice-colonne de variables et où $B = (b_1, \dots, b_n)^t$ est une matrice colonne, est appelé un* système de Cramer*.*

Théorème 3.1. *Un système de Cramer a une unique solution, qui est $X = A^{-1}B$.*

Démonstration. Si $AX = B$, on obtient par multiplication par A^{-1} à gauche : $X = IX = A^{-1}AX = A^{-1}B$. Réciproquement, si $X = A^{-1}B$, on obtient par multiplication à gauche par A : $AX = AA^{-1}B = B$. □

3.6 Opérations de lignes

Définition 3.3. *Les* opérations de lignes *sont de trois sortes, où A, B sont des matrices de même taille et où $A \longrightarrow B$ signifie qu'on transforme A en B par l'opération en question :*

1. *$A \xrightarrow{l_i + a l_j} B$, qui signifie qu'on a ajouté à la ligne i de A la ligne j de A préalablement multipliée par a ($i \neq j$, $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$).*

2. $A \xrightarrow{(ij)} B$, *qui signifie qu'on a échangé les lignes* i *et* j *dans* A $(i \neq j)$.
3. $A \xrightarrow{al_i} B$, *qui signifie qu'on a multiplié par* a *la ligne* i *de* A $(a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0)$.

Définition 3.4. *Une* matrice élémentaire *est une matrice obtenue à partir d'une matrice identité par une opération de ligne.*

Proposition 3.5. *Si* $A \longrightarrow B$ *par une opération de ligne, alors* $B = PA$*, où* P *est la matrice élémentaire correspondant à cette opération.*

Démonstration. C'est un excellent exercice, un peu long. □

Proposition 3.6. *Toute matrice élémentaire a un inverse qui est aussi une matrice élémentaire.*

Démonstration. Si $A \overset{l_i+al_j}{\longrightarrow} B$, on a clairement aussi $B \overset{l_i-al_j}{\longrightarrow} A$. Soit P la matrice élémentaire correspondant à l'opération l_i+al_j. On a donc $I \overset{l_i+al_j}{\longrightarrow} P$ et par ce qui précède, $P \overset{l_i-al_j}{\longrightarrow} I$. La proposition précédente montre implique que $I = QP$, où Q est la matrice élémentaire qui correspond à l'opération de lignes $l_i - al_j$.

En remplaçant a par $-a$ dans le raisonnement précédent, on trouve que $I = PQ$. Donc l'inverse de P est Q. □

Corollaire 3.1. *Si on transforme* A *en* B *par une suite d'opérations de lignes, alors il existe une matrice inversible* P *telle que* $B = PA$*. En fait,* P *est produit de matrices élémentaires.*

Démonstration. Raisonnons par récurrence sur le nombre d'opérations de lignes qui transforment A en B. L'assertion à prouver est la suivante : si A est transformé en B par n opérations de lignes, alors il existe P produit de matrices élémentaires telle que $B = PA$.

Si $n = 1$, c'est-à-dire $A \to B$ par une opération de lignes, alors $B = PA$ où P est une matrice élémentaire (Proposition 3.5).

L'hypothèse de récurrence est que l'assertion est vraie pour n. Soit alors des matrices A et B telles que B s'obtient de A par $n+1$ opérations de lignes. Il existe alors une matrice B' telle que B' s'obtienne de A par n opérations de lignes, et que $B' \to B$ par une opération de lignes. Par hypothèse de récurrence, il existe une matrice P qui est un produit de matrices élémentaires telle que $B' = PA$; de plus, par la proposition 3.5, il existe une matrice élémentaire P' telle que $B = P'B'$. On a alors

$B = P'B' = P'PA = (P'P)A$ est l'assertion pour $n+1$ s'ensuit, car $P'P$ est un produit de $n+1$ matrices élémentaires.

Pour conclure la preuve, il suffit d'appliquer la proposition 3.3. $\square$

Définition 3.5. *Une matrice est dite* échelonnée *si elle a les propriétés suivantes :*

— *si une ligne est nulle, touts les nulles plus basses sont nulles ;*

— *si une ligne est non nulle, le premier coefficient non nul dans cette ligne est* 1 *(on appellera* pivot *un tel élément) ;*

— *si une ligne est non nulle, avec le premier coefficient non nul en colonne j, alors la ligne suivante a son premier coefficient non nul en colonne $> j$.*

Une matrice échelonnée a l'allure suivante :

$$\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & \times & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \times \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & \times & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \times \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & \times & \dots & \times \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Théorème 3.2. *On peut par une suite d'opérations de lignes transformer toute matrice en une matrice échelonnée.*

Preuve et algorithme. On va raisonner de manière un peu littéraire.

Etape 1. Si la matrice a sa première colonne nulle, on travaille sur la matrice obtenue en la supprimant, et on la rétablit à la fin. On obtient bien une matrice échelonnée, car si on rajoute une colonne nulle à gauche d'une matrice échelonnée, on obtient une matrice échelonnée.

Etape 2. On peut donc supposer que la première colonne comporte un élément non nul. On en choisit un (de préférence le plus petit possible, 1 si c'est possible). Par une opération $(1i)$, on le ramène en haut à gauche. Par une opération al_1, on le change en 1. Puis par des opérations $l_i + al_1$, on annule tous les autres éléments de la première colonne (donc avec $i \geq 2$).

Etape 3 : On a maintenant une matrice de la forme.

$$\begin{bmatrix} 1 & \times & \dots & \times \\ 0 & \times & \dots & \times \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \times & \dots & \times \end{bmatrix}$$

On retourne à l'étape 1 pour la matrice obtenue en supprimant la première ligne et la première colonne. On les rétablira à la fin, et on obtiendra une matrice échelonnée. □

Dans la pratique, on peut ne pas supprimer des lignes ou des colonnes, mais on les garde tout au cours du calcul. C'est peu plus lourd, mais ça évite de devoir les garder en mémoire.

Proposition 3.7. *Si une matrice échelonnée a plus de lignes que de colonnes, alors sa dernière ligne est nulle.*

Démonstration. Soit $n \times p$ la taille de la matrice. On a par hypothèse $p < n$. Soit m le nombre de lignes non nulles.

Soit φ la fonction de $\{1, \ldots, m\}$ dans $\{1, \ldots, p\}$ qui à i associe l'indice j de la colonne où se trouve le pivot de la ligne i. C'est une fonction injective, car les pivots sont tous dans des colonnes ditinctes. De l'injectivité on déduit que $m \leq p$. Donc $m \leq p < n$, d'où $m < n$.

Il y a donc moins de lignes non nulles que de lignes. Il existe donc au moins une ligne nulle. □

Corollaire 3.2. *Si une matrice a plus de lignes que de colonnes, ses lignes sont linéairement dépendantes.*

Autrement dit : soit $M \in M_{np}(K]$ avec $n > p$; soient $l_1, \ldots, l_n$ ses lignes (chacune d'elles est une élément de $M_{1p}(\mathbb{R})$) ; alors il existe des réels $a_1, \ldots, a_n$ tels que $a_1 l_1 + \ldots + a)n l_n = 0$ et que (condition essentielle !) $(a_1, \ldots, a_n) \neq (0, \ldots, 0)$.

Par exemple, pour

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix},$$

on a $(1, 2) - 2(3, 4) + (5, 6) = (0, 0)$ (autrement dit les réels a_1, a_2, a_3 sont ici $1, -2, 1$).

Preuve. Soit M cette matrice, de taille $n \times p$. Il existe par le corollaire 3.1 et le théorème 3.2 une matrice inversible P et une matrice échelonnée N telle que $N = PM$. On a donc $M = IM = P^{-1}PM = P^{-1}N$. La matrice N a sa dernière ligne nulle par la proposition 3.7. On a donc, avec $v = (0, \ldots, 0, 1)$, qui est un vecteur-ligne de longueur n : $vN = 0$. Posons $u = (a_1, \ldots, a_n) = vP$; alors $uM = vPP^{-1}M = vN = 0$, ce qui exprime exactement que $a_1 l_1 + \ldots + a_n l_n = 0$. Mais u n'est pas nul : sinon $v = uP^{-1}$ serait nul, ce qui n'est pas. □

Exercice 3.23. *Soit $A \in M_n(R)$. Montrer que si on transforme par des opérations de lignes la matrice $[A, I_n]$ (c'est une matrice de taille $n \times 2n$ obtenue en plaçant I_n à la droite de A) en la matrice $[B, P]$, alors $B = PA$ (indication : montrer d'abord que $Q[A, B] = [QA, QB]$).*

Exercice 3.24. *Pour des matrices A, B de même taille, on écrit $A \sim B$ si on peut obtenir B à partir de A par une suite d'opérations de lignes. Montrer que $\sim$ est* relation d'équivalence*, c'est-à-dire qu'on a les trois propriétés (A, B, C sont quelconques, mais de même taille) : (i) $A \sim A$; (ii) $A \sim B$ implique $B \sim A$; (iii) $A \sim B$ et $B \sim C$ implique $A \sim C$.*

Exercice 3.25. *Montrer que certaines opérations de lignes commutent. Par exemple que si $A \overset{l_i+al_j}{\longrightarrow} B \overset{l_i+bl_k}{\longrightarrow} C$ et $A \overset{l_i+bl_k}{\longrightarrow} B' \overset{l_i+al_j}{\longrightarrow} C'$, alors $C = C'$. En déduire que les matrices élémentaires correspondant aux opérations $l_i + al_j$ et l_i+bl_k commutent. Montrer que ce n'est pas vrai pour les opérations l_1+l_2 et $l_2 + l_1$, ni pour les matrices élémentaires correspondantes.*

Exercice 3.26. ** Pour n, p fixé, quel est le nombre de formes possibles de matrice échelonnées ?*

3.7 Système d'équations linéaires : méthode de Gauss

Définition 3.6. *Une matrice est dite* échelonnée réduite *si elle est échelonnée et si de plus pour chaque pivot, sa colonne ne comporte à part lui que des 0.*

Proposition 3.8. *On peut par des transformations de lignes transformer toute matrice en un matrice échelonnée réduite.*

Preuve et algorithme. On peut partir d'une matrice échelonnée. Il suffit d'appliquer pour chaque pivot, en position i, j, des opérations de lignes $l_k + al_i$, $k < i$, de manière a annuler l'élément en position k, j. □

Définition 3.7. *La* matrice *du système d'équations linéaires* homogènes *(c'est- à-dire, dont les seconds membres sont nuls), à p inconnues $x_1, \dots, x_p$ et n équations*

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = 0,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p = 0,$$

$$\dots,$$

$$a_{n1}x_2 + a_{n2}x_2 \cdots + a_{np}x_p = 0,$$

est la matrice $[a_{ij}]_{1 \le i \le n, 1 \le j \le p}$.

Pour résoudre ce système, on transforme la matrice en une matrice échelonnée réduite. Le système correspondant à cette nouvelle matrice est *équivalent* au précédent (c'est-à-dire, a les mêmes solutions). Alors les variables correspondant aux pivots (c'est-à-dire, les x_j avec un pivot en colonne j) sont appelées *liées* et les autres sont *libres*. Le nouveau système permet d'exprimer les variables liées en fonction des variables libres, qui peuvent prendre des valeurs arbitraires.

Pour un système général, où les seconds membres sont $b_1, \ldots, b_n$ (en place des 0 ci-dessus), la matrice du système est la même que ci- dessus sauf qu'on y rajoute à droite la colonne $(b_1, \ldots, b_n)^t$. On transforme cette matrice en une matrice échelonnée réduite. Le nouveau système est équivalent au précédent. S'il y a une ligne de la forme $[0, \ldots, 0, c]$, alors on a une équation du type $0x_1 + \cdots + 0x_p = c$; s'il y en a une avec $c \neq 0$, le sytème n'a pas de solution. Sinon, on obtient comme ci-dessus des expressions pour les variables liées en fonction des variables libres. S'il n'y a pas de variable libre, il y a une solution unique. Sinon, il y a une infinité de solutions obtenues en donnant des valeurs arbitraires aux variables libres.

Un examen attentif de la méthode de substitution et de la méthode ci-dessus révèle qu'elles sont essentiellement équivalentes : à condition, pour la méthode de substitution, de se donner un ordre sur les variables, qu'on éliminera dans cet ordre.

Une autre conséquence de l'existence de la matrice échelonnée réduite est la caractérisation suivante des matrices inversibles.

Corollaire 3.3. *Une matrice carrée est inversible si et seulement si elle est produit de matrices élémentaires.*

On utilise dans la preuve qui suit le résultat suivant, laissé en exercice : si une matrice carrée est échelonnée réduite, et si elle n'a pas de ligne nulle, alors c'est la matrice identité.

Démonstration. Un produit de matrices élémentaires est inversible (proposition 3.3 et corollaire 3.6). Réciproquement, soit A une matrice inversible. Il existe donc, par la proposition 3.8 et le corollaire 3.1, une matrice P qui est produit de matrice élémentaires et une matrice B échelonnée réduite telle que $B = PA$. Alors B est inversible (proposition 3.3), car elle est un produit de matrices inversibles ; donc B doit être la matrice identité I (sinon elle a une ligne nulle, et ne peut être inversible). Donc, en multipliant $I = PA$ à gauche par P^{-1}, on trouve $A = P^{-1}$: donc A est un produit de matrices élémentaires par la proposition 3.3 et le corollaire 3.6. □

Exercice 3.27. ** Retravailler la preuve du corollaire 3.3 pour montrer que si A est carrée et inversible à droite, alors elle est produit de matrices élémentaires (indication : B est inversible à droite, carrée et réduite échelonnée ; donc sa dernière ligne n'est pas nulle) ; donc inversible. En déduire, par transposition, qu'une matrice est inversible à droite si et seulement si elle est inversible à gauche.*

4 Espaces vectoriels et applications linéaires

4.1 Les huit axiomes d'un espace vectoriel

Définition 4.1. *Un* espace vectoriel *est un ensemble E qui a deux opérations. La première, appelé* addition, *ou* somme, *et la seconde est appelée* produit externe. *L'addition associe à deux éléments quelconques x, y de E un élément noté $x + y$. Le produit externe associe à un nombre réel a et à un élément x de E un élément de E noté ax. Ces deux opérations jouissent des propriétés suivantes (appelées* axiomes des espaces vectoriels*) : quels que soient les éléments x, y, z de E et les réels a, b, on a :*

1. $x + y = y + x$ *(commutativité) ;*
2. $(x + y) + z = (x + y) + z$ *(associativité ;*
3. *Il existe un élément* 0 *de E tel que $x + 0 = x$ (existence de l'élément neutre) ;*
4. *Il existe un élément x' de E tel que $x+x' = 0$ (existence de l'opposé) ;*
5. $1x = x$ *(le produit externe de $1 \in \mathbb{R}$ avec x est égal à x) ;*
6. $(a + b)x = ax + bx$ *(distributivité) ;*
7. $a(x + y) = ax + ay$ *(distributivité) ;*
8. $(ab)x = a(bx)$ *(associativité).*

Notez qu'on écrit parfois 0_E pour le 0 dans l'axiome 3. Ceci pour le distinguer du 0 de $\mathbb{R}$, et aussi de 0_F, au cas où on considérerait un autre espace vectoriel F. Mais en fait, très souvent, on écrit simplement 0 pour tous ces zéros : ceci constitue ce qu'on appelle un *abus de notation*, qui peut être ambigu ; le contexte en général lève l'ambiguïté. Si par exemple, $e \in E$ et si on écrit $e + 0$, c'est clair que c'est $e + 0_E$, et non pas $e + 0_{\mathbb{R}}$, car il n'y a pas de sens à additionner un élément de E et un élément de $\mathbb{R}$ (sauf dans le cas particulier où $E = \mathbb{R}$).

Pour un exemple concret de ces propriétés, regardez l'exemple 4.2 ci-dessous : x, y, z sont des matrices de même taille et ax désigne (comme déjà vu) le produit du réel a par la matrice x (ax s'obtient de x en y multipliant tous les coefficients par a)

On appelle souvent *scalaire* un élément de $\mathbb{R}$; ceci, par opposition aux éléments des éléments des espaces vectoriels, qui sont souvent appelés *vecteurs*.

On a $0e = 0$ (ici le premier 0 est le zéro de $\mathbb{R}$, et le second celui de E) : en effet $0e + 0e = (0 + 0)e = 0e$, donc en ajoutant de chaque côté l'opposé de $0e$, on trouve $0e = 0$.

De plus l'opposé de e est $(-1)e$ (qu'on note $-e$) : en effet, $e + (-1)e = 1e + (-1)e = (1 + (-1))e = 0e = 0$.

Exemple 4.1. *L'*espace vectoriel nul *est l'ensemble à un élément* $\{0\}$*. C'est un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$*. On a évidemment* $0 + 0 = 0$ *et* $a0 = 0$ *pour tout scalaire* a*.*

Exemple 4.2. *Fixons des entiers naturels* n *et* p*. Alors l'ensemble* $M_{np}(\mathbb{R})$ *est un espace vectoriel ; car on peut additionner deux matrices, et on peut multiplier toute matrice par un scalaire, et tous les huit axiomes sont satisfaits, comme on l'a vu dans la section 3.2.*

Exemple 4.3. *Fixons un intervalle* I *de* $\mathbb{R}$ *et soit* F *l'ensemble des fonctions de* I *dans* $\mathbb{R}$*. Alors* F *est un espace vectoriel. Car on peut additionner deux fonctions dans* F *et multiplier une fonction dans* F *par un scalaire ; de plus les huit axiomes sont satisfaits.*

Définition 4.2. *Soit* E *un espace vectoriel. Une* combinaison linéaire *dans* E *est une expression de la forme* $a_1e_1 + \ldots + a_ne_n$ *où* $a_1, \ldots, a_n$ *sont dans* $\mathbb{R}$ *et* $e_1, \ldots, e_n$ *sont dans* E*. On appelle* coefficients *de la combinaison linéaire les réels* $a_1, \ldots, a_n$*.*

Une telle expression s'écrit aussi $\sum_{i=1}^{i=n} a_ie_i$, ou aussi $\sum_{1\leq i\leq n} a_ie_i$. On appelle *longueur* de la combinaison linéaire l'entier n. Le cas particulier $n = 0$ est aussi considéré ; il est utile pour faire des raisonnements par récurrence.

La combinaison linéaire représente un vecteur dans E, défini par récurrence sur n : si $n = 0$, c'est le vecteur nul ; si $n = 1$, c'est a_1e_1 ; et si $n \geq 2$, c'est $(a_1e_1 + \ldots + a_{n-1}e_{n-1}) + a_ne_n$. Le fait qu'on omet les parenthèses provient de ce que l'addition dans E est associative.

La combinaison linéaire ci-dessous est dite *triviale* si tous ses coefficients sont nuls.

Exercice 4.1. *On note* E *l'ensemble des matrices infinies à coefficients réels, dont les lignes et les colonnes sont indexées par les entiers naturels* *positifs 1,2,3,4.... Définir de manière naturelle une addition dans E. De même, un produit d'un scalaire par une telle matrice. Montrer que E est alors un espace vectoriel sur les réels (vérifier les huit axiomes).*

Exercice 4.2. *Montrer que l'ensemble des polynômes de degré au plus 4, à coefficients réels, est un espace vectoriel.*

Exercice 4.3. *Montrer que l'ensemble des suites* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de nombres réels est un espace vectoriel.*

Exercice 4.4. *Dans cet exercice les lettres* u, v, w, x, y, z *représentent des vecteurs d'un espace vectoriel* E *et* a, b, c, d, e *des scalaires.*

(i) Montrer que si $u = 3v - w + x$*, alors chacun des vecteurs* v, w, x *est combinaision linéaire de* u *et des autre vecteurs (par exemple,* v *est combinaison linéaire de* u, w, x*).*

(ii) Montrer que si $au + bv + cw = 0$ *et si* $a \neq 0$*, alors* u *est combinaison linéaire de* v *et* w*. Pourquoi l'hypothèse* $a \neq 0$ *est-elle essentielle ?*

(iii) Montrer que si $u = 3v - w$*,* $v = x + y$ *et* $w = y - z$*, alors* u *est combinaison linéaire de* x, y, z*.*

(iv) Montrer que si u *est combinaison linéaire de* v *et* w*, que* v *et* w *sont chacun combinaison linéaire de* x *et* y*, alors* u *est combinaison linéaire de* x *et* y*.*

Exercice 4.5. *Montrer que si le vecteur* x *est combinaison linéaire des vecteurs* y *et* z*, et si* $x \neq 0$*, alors soit* y *est combinaison linéaire de* x *et* z*, soit* z *est combinaison linéaire de* x *et* y*.*

4.2 Applications linéaires

Une application linéaire est une fonction d'un espace vectoriel vers un autre qui préserve les opérations de ces espaces. Plus précisément :

Définition 4.3. *Soient* E, F *des espaces vectoriels. Une fonction* $f : E \to F$ *(c'est-à-dire une fonction de* E *vers* F*) est appelée une* application linéaire *si pour tous vecteurs* x, y *dans* E *et tout scalaire* a *on* $f(x+y) = f(x)+f(y)$ *et* $f(ax) = af(x)$*.*

Un exemple est la fonction *trace*, qui est une application linéaire de $M_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$: elle envoie toute matrice carrée sur la somme de ses éléments diagonaux. Un autre exemple est la fonction qui à toute fonction $f : I \to \mathbb{R}$ (où I est un intervalle fixé) associe $f(a)$ ($a \in I$ fixé). Un autre exemple est la fonction transposition $M_{np}(\mathbb{R}) \to M_{pn}(\mathbb{R})$.

Définition 4.4. *On appelle* endomorphisme *de V une application linéaire de l'espace vectoriel V dans lui-même.*

Un exemple d'endomorphisme est la transposition de l'espace de $M_n(\mathbb{R})$ dans lui-même.

Exercice 4.6. *Montrer que les applications suivantes sont linéaires.*

(i) $M_{22}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mapsto a+b+c+d.$

(ii) $M_{13}(\mathbb{R}) \to M_{22}(\mathbb{R}), [a,b,c] \mapsto \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}.$

(iii) $M_{13}(\mathbb{R}) \to M_{31}(\mathbb{R}), [a,b,c] \mapsto \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}.$

(iv) $M_{12}(\mathbb{R}) \to M_{22}(\mathbb{R}), [a,b] \mapsto \begin{bmatrix} 2a+b & a-b \\ a & a+2b \end{bmatrix}.$

Exercice 4.7. ** Soit $P(x) = a_n x^n + \dots a_1 x + a_0$ un polynôme ($a_i \in \mathbb{R}$). Montrer que la fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, a \mapsto P(a)$ est une application linéaire si et seulement si $\forall i \neq 1, a_i = 0$.*

4.3 Produit d'espaces vectoriels

Rappelons que le *produit cartésien* de deux ensembles E, F est l'ensemble des couples (x,y), $x \in E$, $y \in F$.

Si E, F sont des espaces vectoriels, on définit deux opérations sur leur produit cartésien : la somme et le produit externe. On les définit pour tous $x, x' \in E$, $y, y' \in F$, $a \in \mathbb{R}$ par les formules

$$(x,y) + (x',y') = (x+x', y+y'),\ a(x,y) = (ax, ay).$$

Proposition 4.1. *Soient E, F deux espaces vectoriels. Le produit cartésien $E \times F$, avec les deux opérations ci-dessus, est un espace vectoriel. Le vecteur nul de $E \times F$ est $(0_E, O_F)$. L'opposé de (x,y) est $(-x,-y)$.*

Démonstration. Vérifions par exemple l'associativité de l'addition : $((x,y)+(x',y'))+(x'',y'') = (x+x',y+y')+(x'',y'') = ((x+x')+x'',(y+y')+y'') = (x+(x'+x''),y+(y'+y'')) = (x,y)+(x'+x'',y'+y'') = (x,y)+((x',y')+(x'',y''))$. On a utilisé tour à tour la définition de la somme dans $E \times F$, ainsi que l'associativité de l'addition dans E et F.

Les sept autres axiomes sont vérifiés sans problème. Nous le laissons en exercice. □

Plus généralement, si $E_1, \ldots, E_n$ sont des espaces vectoriels, $E_1 \times \cdots \times E_n$ est aussi un espace vectoriel. La somme et le produit externe sont définis par

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n),$$

$$a(x_1, \ldots, x_n) = (ax_1, \ldots, ax_n).$$

Le cas particulier où $E_i = \mathbb{R}$ pour tout i est particulièrement important : $\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel. En fait on l'a déjà vu (exemple 4.2), puisque $\mathbb{R}^n = M_{1n}(\mathbb{R})$.

Exercice 4.8. *Soit E un espace vectoriel. On considère la fonction de $E \times E$ dans E qui envoie (u, v) sur $u - v$. Montrer que c'est une application linéaire.*

5 Sous-espaces vectoriels

5.1 Définition et caractérisation

Définition 5.1. *Un* sous-espace vectoriel *d'un espace vectoriel V est un sous-ensemble E non vide de V qui est fermé sous les deux opérations de V ; ce qui signifie que quels que soient les vecteurs u, v dans E et le scalaire a, on a $u + v \in E$ et av dans E.*

Notez que puisque le sous-espace est non vide, il contient 0 (obtenu en multipliant par le scalaire 0 n'importe quel vecteur du sous-espace).

Exemple 5.1. *Soit E l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n. Considérons le sous-ensemble F des matrices de trace nulle. La matrice nulle est dans F ; la somme de deux matrices de trace nulle est de trace nulle ; et le produit externe d'une matrice de trace nulle par un réel est encore de trace nulle. Donc F est un sous-espace. Soyons encore plus concret : par exemple $n = 2$, $E = M_2(\mathbb{R}) = \{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\}$ et $F = \{\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}\}$.*

Exemple 5.2. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, F l'espace vectoriel des fonctions de I dans $\mathbb{R}$, et C l'ensemble des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$. Alors C est un sous-espace vectoriel de F. En effet, C est bien un sous-ensemble de F. De plus, la fonction nulle est dans C (elle est continue). De plus si $f, g \in C$, alors $f + g \in C$ (la somme de deux fonctions continues sur I est continue). Enfin, si $f \in C$ et $a \in \mathbb{R}$, alors la fonction af est continue.*

Lorsque F est un sous-espace de l'espace vectoriel de E, F devient un espace vectoriel avec les *opérations induites* de E à F ; c'est-à-dire, la somme dans E et le produit externe de E définissent sur F une somme et un produit externe, car F est fermé sous ces opérations.

Proposition 5.1. *Un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel est un espace vectoriel avec les opération induites.*

Démonstration. Soit F un sous-espace de E. Le 0 est dans F, comme nous l'avons vu. De plus si $x \in F$, alors son opposé est $(-1)x$: il est aussi dans F. Donc les axiomes 3 et 4 sont satisfaits. Les six autres axiomes sont évidemment satisfaits. □

Pour montrer qu'un sous-ensemble donné d'un espace vectoriel en est un sous-espace, on applique la recette suivante.

Proposition 5.2. *Soit F un sous-ensemble de l'espace vectoriel de E. Alors F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si on a les trois propriétés suivantes :*

1. $0 \in F$;
2. *pour tous x, y dans F, on a $x + y \in F$;*
3. *pour tous $x \in E$ et pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a $ax \in F$.*

Démonstration. C'est évident. □

Exercice 5.1. *Montrer que si G est sous-espace de F et si F est sous-espace de E, alors G est sous-espace de E.*

Exercice 5.2. *Montrer que l'espace des fonctions dérivables de I dans $\mathbb{R}$ est un sous-espace de l'ensemble des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$.*

Exercice 5.3. *Montrer que l'ensemble des fonctions deux fois dérivables $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f'' + f = 0$ est un espace vectoriel. Indication : montrer que c'est un sous-espace d'un espace judicieusement choisi.*

Exercice 5.4. *Montrer que l'ensemble des* matrices magiques *dans $M_{np}(\mathbb{R})$ (c'est-à-dire l'ensemble des matrices dont la somme de chaque ligne et de chaque colonne est nulle) est un sous-espace de $M_{np}(\mathbb{R})$.*

Exercice 5.5. *Est-ce que l'ensemble des matrices de trace égale à 2 est un sous-espace de $M_2(\mathbb{R})$?*

Exercice 5.6. *Est-ce que l'ensemble des matrices de déterminant non nul (resp. de déterminant nul) est un sous-espace de $M_2(\mathbb{R})$?*

5.2 Sous-espace engendré

Soient $v_1, \dots, v_n$ des vecteurs d'un espace vectoriel V. Le *sous-espace engendré par les vecteurs* $v_1, \dots, v_n$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de ves vecteurs. On le note $Vect(v_1, \dots, v_n)$.

Exercice 5.7. *Montrer que si un sous-espace H de V contient les vecteurs $v_1, \dots, v_n$, alors $Vect(v_1, \dots, v_n) \subset H$.*

Exercice 5.8. *On suppose que $Vect(v_1, \dots, v_{n-1}) = Vect(u_1, \dots, u_{n-1})$ et que $u_n = v_n + a_1u_1 + \cdots + a_{n-1}u_{n-1}$ ($a_i \in \mathbb{R}$). Montrer que $Vect(v_1, \dots, v_n) = Vect(u_1, \dots, u_n)$.*

Exercice 5.9. *Montrer que $Vect(a_1v_1, \dots, a_nv_n) = Vect(v_1, \dots, v_n)$ si les scalaires a_i son non nuls.*

5.3 Intersection de sous-espaces et systèmes d'équations linéaires

Rappelons que si F, G sont ensembles, leur *intersection* est l'ensemble des éléments de F qui sont aussi dans G.

Proposition 5.3. *L'intersection de deux sous-espaces d'un espace vectoriel en est un sous-espace.*

Démonstration. Si $x, y \in F \cap G$, alors $x \in F$ et $y \in F$; donc $x + y \in F$. De même, $x + y \in G$. Donc $x + y \in F \cap G$.

Si $x \in F \cap G$ et $a \in \mathbb{R}$, alors $x \in F$, donc $ax \in F$. De même $ax \in G$. Donc $ax \in F \cap G$. □

Corollaire 5.1. *L'intersection d'un nombre fini de sous-espaces d'un espace vectoriel est un sous-espace.*

Démonstration. Récurrence sur le nombre de sous-espaces. □

Un exemple important de sous-espace vectoriel est le sous-espace de $\mathbb{R}^p = M_{1p}(\mathbb{R})$ associé à un système d'équations linéaires homogène. Considérons le système écrit dans la définition 3.7. L'ensemble des $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$ qui satisfont le sytème est un sous-espace de $\mathbb{R}^p$. Pour le voir, on remarque que cet ensemble est l'intersection des n sous-ensembles $\{(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p, a_{i1}x_1 + \cdots + a_{ip}x_p = 0\}$, $i = 1, \dots, n$.

On est donc ramené (par le corollaire 5.1) au cas d'une seule équation linéaire : $a_1x_1 + \ldots + a_px_p = 0$. On remarque que l'ensemble de p-uplets qui satisfont une équation linéaire satisfait les trois conditions de la proposition 5.2 (une preuve plus moderne consiste à vérifier que cet ensemble est le noyau de l'application linéaire $(x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p \mapsto a_1x_1 + \ldots + a_px_p \in \mathbb{R}$, voir le corollaire 7.1)

Qu'en est-il des systèmes d'équations linéaires généraux non homogènes ? Ceci est traité dans l' exercice 5.11.

Exercice 5.10. *Montrer que l'intersection d'une famille quelconque de sous-espaces d'un espace vectoriel est un sous-espace.*

Exercice 5.11. ** Un* sous-espace affine *d'un espace vectoriel E est une partie de E qui est soit vide, soit de la forme $e + F = \{e + f, f \in F\}$, où F est un sous-espace vectoriel de E et $e \in E$. Montrer que si $e' \in e+F$, alors $e+F = e'+F$. Montrer que l'intersection de deux sous-espaces affines est un sous-espace affine ; de même pour un nombre fini quelconque de sous-espaces affines. Montrer que l'ensemble des solutions d'un système d'équations linéaires en p variables est un sous- espace affine de $\mathbb{R}^p$.*

5.4 Sommes de deux sous-espaces

Définition 5.2. *On dit que E est* somme *de ses deux sous-espaces F et G si si tout vecteur dans E est somme d'un vecteur dans F est d'un vecteur dans G. Notation : $E = F + G$.*

Autrement dit, on a :
(i) $\forall x \in E$, $\exists y \in F$ et $\exists z \in G$ tels que $x = y + z$.

Définition 5.3. *On dit que F, G, sous-espaces de E, sont* supplémentaires, *si tout vecteur dans E est de manière unique somme d'un vecteur dans F et d'un vecteur dans G. On dit aussi que E est* somme directe *de F et G.*

Autrement dit on a la propriété (i) ci-dessus (existence) ainsi que la propriété (ii) ci-dessous :
(ii) (unicité) $\forall x, x' \in F$ et $\forall y, y' \in G$, $x + y = x' + y'$ implique $x = x'$ et $y = y'$.

Proposition 5.4. *Les deux sous-espaces F, G de E sont supplémentaires si et seulement si $F + G = E$ et $F \cap G = \{0\}$.*

Démonstration. Supposons que F, G soient supplémentaires. Alors $F + G = E$; supposons que $e \in F \cap G$; alors $e \in F$ et $-e \in G$. On a $0 = 0 + 0 =$

$e+(-e)$. Comme 0 s'écrit de manière unique comme la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G, on doit avoir $e = 0$. Donc $F \cap G = 0$.

Réciproquement, supposons que $F + G = E$ et $F \cap G = \{0\}$. Il suffit de montrer l'unicité. Supposons donc que $f + g = f' + g'$, avec des notations évidentes ($f \in F$ etc ...). Alors $f - f' = g - g'$. Ce vecteur est dans $F \cap G$, donc il doit être nul. On a donc $f = f'$ et $g = g'$. □

Exercice 5.12. *Soient E, F deux espaces vectoriels. Montrer que les sous-espaces $G_1 = \{(0, f), f \in F\}$ et $G_2 = \{(e, 0), e \in E\}$ de $E \times F$ sont supplémentaires.*

Exercice 5.13. *Montrer que l'ensemble des matrices symétriques et l'ensemble des matrices antisymétriques dans $M_n(\mathbb{R})$ en sont des sous-espaces supplémentaires (une matrice est* symétrique *(resp.* antisymétrique*) si elle est égale à (resp. à l'opposée de) sa transposée).*

Exercice 5.14. *Montrer que l'ensemble des fonctions paires et l'ensemble des fonctions impaires sont des sous-espaces supplémentaires de l'espace vectoriel des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (une fonction est* paire *(resp.* impaire*) si $f(-x) = x$ (resp. $f(-x) = -f(x)$) pour tout x).*

6 Bases et dimension

6.1 Dépendance linéaire

Définition 6.1. *On dit que des vecteurs $v_1, \ldots, v_n$ d'un espace vectoriel V sont* linéairement dépendants *s'il existe des scalaires $a_1, \ldots, a_n$ tels que $(a_1, \ldots, a_n) \neq 0$ et que $a_1v_1 + \cdots + a_nv_n = 0$.*

Pour exprimer que $(a_1, \ldots, a_n) \neq 0$, on dit que $a_1, \ldots, a_n$ sont *non tous nuls.* Cette condition est essentielle, car si on l'omet, la définition précédente n'a pas de sens (puisque pour tous vecteurs $v_1, \ldots, v_n$ on a $0v_1 + \ldots + 0v_n = 0$).

Définition 6.2. *On dit que des vecteurs $v_1, \ldots, v_n$ d'un espace vectoriel V sont* linéairement indépendants *s'ils ne sont pas linéairement dépendants.*

Cela signifie que quels que soient les scalaires $a_1, \ldots, a_n$,

$$a_1v_1 + \cdots + a_nv_n = 0 \Rightarrow a_1 = \ldots = a_n = 0.$$

Ceci donne la recette suivante : si vous voulez prouver que des vecteurs $v_1, \ldots, v_n$ sont linéairement indépendants, vous considérez des scalaires *quelconques* $a_1, \ldots, a_n$ et vous devez prouver l'implication ci-dessus.

Exemple 6.1. *Prouvons que les vecteurs* $(1, 2)$ *et* $(2, 3)$ *sont linéairement indépendants. Soient* a, b *des réels quelconques ; écrivons qu'on a le côté gauche de l'implication ci-dessus :* $a(1, 2) + b(2, 3) = 0$*. On obtient* $(a + 2b, 2a + 3b) = (0, 0)$*, donc* $a + 2b = 0$ *et* $2a + 3b = 0$*. On résout ce système d'équations linéaires, et on trouve* $a = b = 0$ *; cqfd.*

Définition 6.3. *On dit qu'un vecteur* v dépend linéairement de $v_1, \ldots, v_n$ *si* v *est égal à une combinaison linéaire de* $v_1, \ldots, v_n$*.*

Proposition 6.1. *Soit* $p < n$*. Si* $v_1, \ldots, v_p$ *sont linéairement indépendants et si* $v_1, \ldots, v_n$ *sont linéairement dépendants, alors il existe* $j \in \{p+1, \ldots, n\}$ *tel que* v_j *dépend linéairement des autres vecteurs* v_k*,* $k = 1, \ldots, n$*,* $k \neq j$*.*

Preuve. Il existe des scalaires $a_1, \ldots, a_n$, non tous nuls, tels que $a_1v_1 + \cdots + a_nv_n = 0$. On ne peut avoir $a_{p+1} = \ldots = a_n = 0$: sinon en effet les $a_1, \ldots, a_p$ sont non tous nuls et $v_1, \ldots, v_p$ sont linéairement dépendants, contrairement à l'hypothèse.

Il existe donc $j \in \{p+1, \ldots, n\}$ tel que $a_j \neq 0$. Alors $a_jv_j = -\sum_{i\neq j} a_iv_i$ et par suite $v_j = \frac{-1}{a_j}\sum_{i\neq j} a_iv_i = \sum_{i\neq j} \frac{-a_i}{a_j} v_i$. □

Proposition 6.2. *Si* v *dépend linéairement de* $v_1, \ldots, v_n$ *et si* v_n *dépend linéairement de* $v_1, \ldots, v_{n-1}$*, alors* v *dépend linéairement de* $v_1, \ldots, v_{n-1}$*.*

Preuve. On a en effet $v = a_1v_1 + \ldots + a_nv_n$ et $v_n = b_1v_1 + \ldots + b_{n-1}v_{n-1}$. Par suite $v = a_1v_1 + \ldots + a_{n-1}v_{n-1} + a_n(b_1v_1 + \ldots + b_{n-1}v_{n-1}) = a_1v_1 + \ldots + a_{n-1}v_{n-1} + a_nb_1v_1 + \ldots + a_nb_{n-1}v_{n-1} = (a_1 + a_nb_1)v_1 + \cdots (a_{n-1} + a_nb_{n-1})v_{n-1}$. □

Proposition 6.3. *Si des vecteurs* $v_1, \ldots, v_n$ *d'un espace vectoriel dépendent linéairement de vecteurs* $x_1, \ldots, x_p$ *et si* $n > p$*, alors* $v_1, \ldots, v_n$ *sont linéairement dépendants.*

Preuve. Ecrivons que chaque v_i est combinaison linéaire des x_j : $v_i = \sum_{j=1}^{j=p} a_{ij}x_j$, pour tout $i = 1, \ldots, n$, avec des scalaires a_{ij}. Ceci définit une matrice $A \in M_{np}(\mathbb{R})$. Cette matrice a n lignes et p colonnes : elle a plus de lignes que de colonnes. Donc par le corollaire 3.2, ses lignes $l_1, \ldots, l_p$ sont linéairement dépendantes : il existe des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, non tous nuls, tels que $\lambda_1l_1 + \ldots + \lambda_nl_n = 0$. Ceci signifie que pour tout $j = 1, \ldots, p$, la j-ème composante de ce vecteur (qui est dans $\mathbb{R}^p$) est nulle, donc $\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_ia_{ij} = 0$.

On en déduit que $\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_iv_i = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i \sum_{j=1}^{j=p} a_{ij}x_j = \sum_{i=1}^{i=n}\sum_{j=1}^{j=p} \lambda_ia_{ij}x_j = \sum_{j=1}^{j=p}\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_ia_{ij}x_j$ (par interversion des sommations) $= \sum_{j=1}^{j=p}(\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_ia_{ij})x_j = \sum_{j=1}^{j=p} 0x_j = 0$.

Comme les λ_i sont non tous nuls, les v_i sont linéairement dépendants. □

Le lecteur qui a du mal à comprendre les formules avec les $\sum$ peut faire le calcul de la preuve précédente en prenant comme exemple $n = 3, p = 2$.

Exercice 6.1. *Montrer que :*

(i) Si $v_1, \dots, v_n$ sont linéairement indépendants, alors $\forall i, v_i \neq 0$.

(ii) Si $v_1, \dots, v_n$ sont linéairement indépendants, alors $v_1, \dots, v_{n-1}$ sont linéairement indépendants.

(iii) Si l'un des vecteurs v_i est nul, alors $v_1, \dots, v_n$ sont linéairement dépendants.

(iv) Si $v_1, \dots, v_n$ sont linéairement dépendants, alors $v_1, \dots, v_{n+1}$ le sont aussi.

Exercice 6.2. *Les vecteurs $v_1, \dots, v_n$ sont linéairement dépendants si et seulement si l'un d'eux est linéairement des autres.*

Exercice 6.3. *Montrer que si x, y sont linéairement indépendants, alors aussi $x, x+y$. Généraliser : si $x_1, \dots, x_n$ sont linéairement dépendants, alors aussi $x_1, \dots, x_{n-1}, x_n + a_1x_1 + \cdots + a_{n-1}x_{n-1}$.*

Exercice 6.4. *Dans $\mathbb{R}^n$: on suppose que $a_1 + \cdots + a_n = 0$. Montrer que $(a_1, \dots, a_n)$ est combinaison linéaire de $(1, -1, 0, \dots, 0), (0, 1, -1, 0, \dots, 0), (0, \dots, 1, -1)$.*

6.2 Bases : existence et unicité de la dimension

Définition 6.4. *On dit que l'espace vectoriel V est* finiment engendré *s'il existe des vecteurs $v_1, \dots, v_n$ dans V, en nombre fini, tels que tout vecteur dans V dépend linéairement de $v_1, \dots, v_n$. Dans ce cas, on dit que $v_1, \dots, v_n$* engendrent *V.*

Définition 6.5. *Soit V un espace vectoriel finiment engendré. Une* base *de V est une suite de vecteurs $v_1, \dots, v_n$ de V qui l'engendrent et qui sont linéairement indépendants.*

Un exemple typique est l'espace vectoriel $M_{np}(\mathbb{R})$ et sa *base canonique*. Celle-ci consiste en les np matrices E_{ij} : cette matrice a tous ses coefficients nuls, sauf celui en position i, j, qui vaut 1.

Théorème 6.1. *Soit $p \leq q$. Soient $v_1, \dots, v_q$ des vecteurs d'un espace vectoriel V, qui engendrent V, et tels que $v_1, \dots, v_p$ soient linéairement indépendants. Il existe alors parmi les vecteurs $v_{p+1}, \dots, v_q$ des vecteurs $u_1, \dots, u_r$ tels que $v_1, \dots, v_p, u_1, \dots, u_r$ forment une base de V.*

Preuve. (récurrence sur $q-p$) Si $q-p=0$, il n'y a rien à démontrer : en effet, dans ce cas, $v_1,\dots,v_p$ est déjà une base de V. Supposons que $q-p>0$, c'est-à-dire $p<q$. Si les vecteurs $v_1,\dots,v_q$ sont linéairement indépendants, alors ils forment une base de V et on a fini. Sinon, ils sont linéairement dépendants. Alors par la proposition 6.1, il existe $j>p$ tel que v_j soit linéairement dépendant des autres vecteurs v_k, $k\in\{1,\dots,q\}\setminus\{j\}$. Sans perte de généralité, on peut supposer que c'est v_q qui est linéairement dépendant de $v_1,\dots,v_{q-1}$. Alors ces $q-1$ vecteurs engendrent V, comme il découle de la proposition 6.2. On a $p\leq q-1$ et $q-1-p<q-p$. Par hypothèse de récurrence, on obtient donc qu'il existe des vecteurs $u_1,\dots,u_r$, pris parmi $v_{p+1},\dots,v_{q-1}$ tels que $v_1,\dots,v_p,u_1,\dots,u_r$ est une base de V. □

Corollaire 6.1. *Tout espace vectoriel finiment engendré possède une base finie.*

Preuve. Il existe des vecteurs $v_1,\dots,v_q$ qui engendrent V. On applique le théorème avec $p=0$. □

Corollaire 6.2. *(théorème dit de la "base incomplète") Soient $v_1,\dots,v_p$ des vecteurs linéairement indépendants dans un espace vectoriel finiment engendré V. Il existe alors des vecteurs $v_{p+1},\dots,v_n$ tels que $v_1,\dots,v_n$ forment une base de E.*

Preuve. Il existe des vecteurs $v_{p+1},\dots,v_q$ qui engendrent V. On applique le théorème aux vecteurs $v_1,\dots,v_p,v_{p+1},\dots,v_q$ qui engendrent évidemment V. □

Corollaire 6.3. *Si $v_1,\dots,v_q$ engendrent V, il existe parmi ces vecteurs des vecteurs qui forment une base de V.*

Preuve. On applique le théorème avec $p=0$. □

Théorème 6.2. *Dans un espace vectoriel finiment engendré, toutes les bases ont le même nombre d'éléments.*

Démonstration. Si on avait deux bases de cardinalités différentes, cela contredirait la proposition 6.3. □

Définition 6.6. *Soit E un espace vectoriel finiment engendré. On appelle* dimension *de E le nombre d'éléments d'une base de E. Notation :* $\dim(E)$.

Théorème 6.3. *Soient E un espace vectoriel de dimension n et $e_1, \ldots, e_n \in E$. Les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $e_1, \ldots, e_n$ forment une base ;

(ii) $e_1, \ldots, e_n$ sont linéairement indépendants ;

(iii) $e_1, \ldots, e_n$ engendrent E.

Il peut paraître bizarre que (ii) ou (iii) suffise. Mais c'est parce que le nombre des vecteurs est égal à la dimension de l'espace. Pour appliquer le théorème, il ne faut pas oublier de vérifier cette condition, qui suppose entre autres qu'on connaisse la dimension.

Démonstration. Il est clair que (i) implique (ii) et (iii).

(ii) $\Rightarrow$ (i) : on peut compléter ces n vecteurs en une base de E (corollaire 6.2). Mais une base de E a n éléments. Donc $e_1, \ldots, e_n$ forment une base.

(iii) $\Rightarrow$ (i) : si les e_i étaient linéairement dépendants, l'un d'eux serait linéairement dépendants des autres. On trouverait alors un système de $n-1$ vecteurs qui engendrent E (proposition 6.2). Donc une base avec au plus $n-1$ éléments (corollaire 6.3), contradiction. □

Exercice 6.5. *Montrer que $v_1, \ldots, v_n$ forment une base de l'espace vectoriel V sis et seulement si tout vecteur v dans V est égal à une combinaison linéaire unique (i.e les coefficients sont uniques) de $v_1, \ldots, v_n$.*

Exercice 6.6. *Soit V l'espace vectoriel des vecteur (a, b, c, d) tels que $a + b + c + d = 0$. (i) Montrer que les vecteurs $(1, -1, 0, 0), (0, 1, -1, 0), (0, 0, 1, -1)$ en forment une base. (ii) Monter que les vecteurs $(1, -1, 0, 0), (1, 0, -1, 0), (1, 0, 0, -1)$ en forment une autre base.*

Exercice 6.7. *Montrer que toutes les bases de $\mathbb{R}$, qui est de dimension 1, sont formées par un seul élément a, $a \neq 0$.*

Exercice 6.8. ** Montrer que les deux vecteurs $(a, b), (c, d)$ forment une base de $\mathbb{R}^2$ si et seulement si $ad - bc \neq 0$.*

6.3 Bases des sous-espaces

Proposition 6.4. *Tout sous-espace d'un espace vectoriel de dimension finie n est un espace vectoriel de dimension finie $\leq n$.*

Démonstration. Soit F un sous-espace d'un espace vectoriel E de dimension finie n. Soit p maximum tel qu'il existe dans F p vecteurs linéairement indépendants. Ce p existe (c'est-à-dire, ce n'est pas l'infini) et $p \leq n$, car dans E (donc dans F) $n+1$ vecteurs sont toujours linéairement dépendants, d'après la proposition 6.3 et le fait que tout vecteur dans E dépend linéairement des n vecteurs d'une base de E.

Soit alors $v_1, \ldots, v_p$, p vecteurs linéairement indépendants dans F. Montrons qu'ils engendrent F (et on en conclura qu'ils forment une base de F, qui est donc de dimension finie p). Soit v un vecteur quelconque dans F. Alors $v_1, \ldots, v_n, v$ sont linéairement indépendants, par maximalité de p. Donc v est linéairement dépendant de $v_1, \ldots, v_n$, d'après la proposition 6.1. $\square$

Exercice 6.9. *Quelle est la dimension de l'espace vectoriel des matrices triangulaires supérieures dans $M_n(\mathbb{R})$?*

Exercice 6.10. *Montrer que F, G, sous-espaces de E de dimension finie, sont supplémentaires, si et seulement s'il existe une base de F et une base G dont la réunion est une base de E. Montrer que c'est aussi vraie pour toutes les bases.*

Exercice 6.11. *Soit $E = \mathbb{R}[x]$, F le sous-espace engendré par les x^n avec n multiple de 3, et G le sous-espace engendré par les x^n, n pas multiple de 3. Montrer que F, G sont supplémentaires.*

Exercice 6.12. *Soit F, G deux sous-espaces supplémentaires d'un espace vectoriel E de dimension n. On suppose que F est de dimension $n-2$. Quelle est la dimension de G ? Soit u, v une base de G, $f \in F$ et G' le sous-espace engendré par $u+f, v+f$. Quelle est la dimension de G' ? Montrer que F et G' sont supplémentaires.*

Exercice 6.13. *Soit E l'ensemble des suites réelles $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Soit a un réel. Soit F le sous-ensemble E constitué des suites qui satisfont $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = aa_n$. Montrer que F est un sous-espace de E. Montrer que toute suite (a_n) dans F satisfait $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = a^{n+1}a_0$. Montrer que F est de dimension 1.*

Exercice 6.14. ** Avec E comme dans l'exercice précédent, et a, b des réels, on considère l'ensemble G des suites (a_n) dans E qui satisfont $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} = aa_{n+1} + ba_n$. Montrer que G est un sous-espace de dimension de 2 de E. Montrer que pour un réel r, la suite $(1, r, r^2, r^3, \ldots)$ est dans G si et seulement si $r^2 = ar + b$.*

7 Applications linéaires

7.1 Exemples

Les exemples sont très nombreux.

Exemple 7.1. *La fonction* identité *d'un espace vectoriel dans lui-même, c'est-à-dire la fonction qui envoie tout vecteur sur lui même, est une application linéaire. Si E est l'espace en question, on la note* id_E*,ou simplement* id. *On a donc :* $\forall x \in E$, $\mathrm{id}(x) = x$.

Exemple 7.2. *Soit E un espace vectoriel et $\lambda \in \mathbb{R}$. La fonction de E dans E qui envoie tout vecteur v sur λv est linéaire. On l'appelle l'*homothétie de rapport λ.

Exemple 7.3. *Soient E, F deux espaces vectoriels. La fonction qui envoie tout vecteur sur le vecteur nul (de F), est une application linéaire. On la note simplement* 0. *On a donc $0(x) = 0$, $\forall x \in E$. On appelle cette fonction la* fonction nulle de E vers F.

Exemple 7.4. *La fonction qui envoie une matrice sur sa transposée est une application linéaire de $M_{np}(\mathbb{R})$ dans $M_{pn}(\mathbb{R})$.*

Exemple 7.5. *La fonction de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même qui envoie (x, y, z) sur $(x, x+y, x+y+z)$ est une application linéaire.*

Exemple 7.6. *La dérivation, qui envoie toute fonction sur sa dérivée, est une application linéaire de l'espace vectoriel des fonctions dérivables $I \to \mathbb{R}$ dans l'espace des fonctions de I dans $\mathbb{R}$ (I est un intervalle de $\mathbb{R}$).*

Exemple 7.7. *La fonction $X \mapsto AX$ est une application linéaire de $M_{pq}(\mathbb{R})$ dans $M_{nq}(\mathbb{R})$ (ici $A \in M_{np}(\mathbb{R})$ est fixée).*

Exercice 7.1. *Soit E un espace vectoriel et $e \in E$. Montrer que la fonction qui à $a \in R$ associe ae est une application linéaire $\mathbb{R} \to E$.*

Exercice 7.2. *Montrer que toute application linéaire $f : \mathbb{R} \to E$ est de la forme ci-dessus (prendre $e = f(1)$).*

Exercice 7.3. *Montrer que la fonction $M_{np}(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ qui à la matrice M associe la somme de tous ses coefficients est une application linéaire.*

7.2 Propriétés

Proposition 7.1. *Soit f une application linéaire de E vers F. On a $f(0) = 0$ et $f(\sum_i a_i x_i) = \sum_i a_i f(x_i)$ quels que soient les vecteurs $x_1, \dots, x_n$ dans E les scalaires $a_1, \dots, a_n$.*

Autrement dit, f envoie le vecteur nul (de E) sur le vecteur nul (de F). La seconde propriété exprime que f préserve les combinaisons linéaires.

Un cas particulier de la deuxième propriété est que $f(x-y) = f(x)-f(y)$.

Preuve. On a $f(0_E) = f(0_{\mathbb{R}} 0_E) = 0_{\mathbb{R}} f(0_E) = 0_F$.

Pour les combinaisons linéaires, on raisonne par récurrence sur n. Pour $n = 0$, c'est vrai, car la combinaison linéaire de longueur nulle vaut 0 et on applique ce qu'on vient de voir. Passage de n à $n+1$: on a $f(\sum_{1 \le i \le n+1} a_i x_i) = f((\sum_{1 \le i \le n} a_i x_i) + a_{n+1} x_{n+1}) = f(\sum_{1 \le i \le n} a_i x_i) + f(a_{n+1} x_{n+1})$ (par linéarité de f) $= \sum_{1 \le i \le n} a_i f(x_i) + a_{n+1} f(x_{n+1})$ (par hypothèse de récurrence et par linéarité de f) $= \sum_{1 \le i \le n+1} a_i f(x_i)$. □

Définition 7.1. *Si f, g sont des applications linéaires de E vers F, on appelle* somme *de f et g, notée $f + g$, la fonction $E \to F$ qui envoie tout vecteur x dans E sur $f(x) + g(x)$. Si a est un scalaire, on appelle* produit externe de a par f *la fonction $E \to F$ qui envoie tout vecteur x de E sur $af(x)$.*

On a donc les formules

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \ (af)(x) = af(x).$$

Proposition 7.2. *Avec cette définition, $f + g$ et af sont des applications linéaires. L'ensemble des applications linéaires de E vers F, muni de ces deux opérations, est un espace vectoriel. Le vecteur nul de cet espace est la fonction nulle de E vers F. L'opposée de f est la fonction $-f = (-1)f$.*

Preuve. Il faut vérifier que $f + g$ et af sont linéaires, dès que f, g sont linéaires et que a est un scalaire.Puis vérifier les huit axiomes. C'est routinier, mais un peu long. □

Rapellons la notion de *composition* de deux fonctions. Si f est une fonction de E vers F et si g est une fonction de F vers G, alors la *composée* de ces deux fonctions est la fonction $g \circ f$ définie par

$$\forall x \in E, g \circ f(x) = g(f(x)).$$

La composition des fonctions est une opération associative (exercice !). De plus, la fonction identité est un élément neutre : si $f : E \to F$, on a $id_F \circ f = f = f \circ id_E$.

Exemple 7.8. *La composée de* $f(x) = x^2 + 1$*,* $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$*, par la fonction* $g(x) = \sqrt{x}$*,* $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$*, est la fonction* $g \circ f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$*.*

Proposition 7.3. *La composée de deux applications linéaires est une application linéaire.*

Autrement dit, si f est une application linéaire de E vers F et si g est une application linéaire de F vers G, alors $g \circ f$ est une application linéaire de E vers G.

Preuve. Soient x, y dans E et a dans $\mathbb{R}$. On $g \circ f(x + y) = g(f(x + y)) = g(f(x)+f(y)) = g(f(x))+g(f(y)) = g\circ f(x)+g\circ f(y)$. De plus, $g\circ f(ax) = g(f(ax)) = g(af(x)) = ag(f(x)) = ag \circ g(x)$. □

Exemple 7.9. *Soit* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *qui contient* 0*. Soit* E *l'espace vectoriel des fonctions dérivables* $I \to \mathbb{R}$*. La fonction qui envoie toute fonction sur sa dérivée est une application linéaire de* E *dans l'espace* F *des fonctions de* I *dans* $\mathbb{R}$*. La fonction de* F *dans* $\mathbb{R}$ *qui envoie* f *sur* $f(0)$ *est une application linéaire. La composée de ces deux fonctions est la fonction qui envoie tout* $f \in E$ *sur* $f'(0)$ *: elle est linéaire par la proposition précédente.*

7.3 Applications linéaires et sous-espaces

Si f est une fonction de E dans F, et X est une partie de E, alors...

Proposition 7.4. *Une application linéaire envoie tout sous-espace sur un sous-espace, par image directe et inverse.*

Preuve. Soit $f : E \to F$ une application linéaire. On applique ci-dessous, systématiquement, plusieurs fois, et sans le dire, la proposition 5.2.

1. Soit V un sous-espace de E. Montrons que $f(V)$ est un sous-espace de F. On a $0 = f(0) \in f(V)$, car $0 \in V$. Si $u, v \in f(V)$, il existe $x, y \in V$ tels que $u = f(x)$ et $v = f(y)$; alors $u+v = f(x)+f(y) = f(x+y) \in f(V)$. Si $v \in f(V)$ et $a \in \mathbb{R}$, alors il existe $x \in V$ tel que $v = f(x)$; alors $av = af(x) = f(ax) \in f(V)$.

2. Soit V un sous-espace de F. Montrons que $f^{-1}(V)$ est un sous-espace de F. On a $0 \in f^{-1}(V)$ car $f(0) = 0 \in V$. Soient $x, y \in f^{-1}(V)$, c'est-à-dire $f(x), f(y) \in V$; alors $f(x + y) = f(x) + f(y) \in V$, donc $x + y \in f^{-1}(V)$. Soit $x \in f^{-1}(V)$ et $a \in \mathbb{R}$; alors $f(x) \in V$, donc $f(ax) = af(x) \in V$, donc $x \in f^{-1}(V)$. □

Définition 7.2. *Le* noyau *d'une application linéaire est l'ensemble des vecteurs qu'elle envoie sur* 0.

Si f est une application linéaire de E vers F, on note $\mathrm{Ker}(f)$ son noyau. On a donc $\mathrm{Ker}(f) = \{x \in E | f(x) = 0\} = f^{-1}(\{0\}) = f^{-1}(0)$.

Corollaire 7.1. *Si* $f : E \to F$ *est une application linéaire, alors* $\mathrm{Ker}(f)$ *est un sous-espace de* E.

Preuve. Le noyau est en effet l'image réciproque du sous-espace nul. □

Définition 7.3. *L'*image *d'une application linéaire* $f : E \to F$ *est l'ensemble* $f(E)$.

Notation : $\Im(f)$. On a donc $\Im(f) = \{y \in F | \exists x \in E, f(x) = y\}$.

Corollaire 7.2. *Si* $f : E \to F$ *est une application linéaire, alors* $\Im(f)$ *est un sous-espace de* F.

Preuve. $\Im(f)$ est en effet l'image de E (sous-espace de lui-même) par f. □

Théorème 7.1. *(théorème du rang) Soient* E, F *des espaces vectoriels de dimensions finies et* $f : E \to F$ *une application linéaire. On* $\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\Im(f))$.

Ce théorème s'appelle théorème du rang car on appelle *rang* de f la dimension de $\Im(f)$. Notation $\mathrm{rg}(f)$.

Preuve. $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace de E. Il est de dimension finie p. Il existe une base $e_1, \dots, e_n$ de E tel que $e_1, \dots, e_p$ est une base de $\mathrm{Ker}(f)$. Alors $f(e_{p+1}), \dots, f(e_n)$ est une base de $\Im(f)$. En effet, soit $y \in \Im(f)$. Il existe donc $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Alors il existe des scalaires $a_1, \dots, a_n$ tels que $x = a_1 e_1 + \cdots a_n e_n$. On alors $f(x) = a_1 f(e_1) + \cdots + a_n f(e_n) = a_{p+1} f(e_{p+1}) + \cdots + a_n f(e_n)$. On en déduit que les vecteurs $f(e_{p+1}), \dots, f(e_n)$ engendrent $\Im(f)$.

Montrons pour finir que ces vecteurs sont linéairement indépendants. Soient donc des scalaires $a_{p+1}, \dots, a_n$ tels que $a_{p+1} f(e_{p+1}) + \cdots + a_n f(e_n) = 0$. Donc $f(a_{p+1} e_{p+1} + \cdots + a_n e_n) = 0$. Donc $a_{p+1} e_{p+1} + \cdots + a_n e_n \in \mathrm{Ker}(f)$. Il existe donc des scalaires $a_1, \dots, a_p$ tels que $a_{p+1} e_{p+1} + \cdots + a_n e_n = a_1 e_1 + \cdots + a_p e_p$. Par suite $a_1 e_1 + \cdots + a_p e_p - a_{p+1} e_{p+1} - \cdots - a_n e_n = 0$ et il s'ensuit que tous ces scalaires sont nuls.

En conclusion, on a $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = p$ et $\dim(\Im(f)) = n - p$ ce qui prouve le théorème. □

Exercice 7.4. *Montrer que si* U, V *sont des sous-espaces de* F*, et* f *une application linéaire de* E *vers* F*, alors* $f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$. *Est-ce un sous-espace ?*

Exercice 7.5. *Montrer que si* $f : E \to F$ *est une application linéaire, et* X, Y *des sous-espaces de* E*, alors* $f(X \cap Y) \subset f(X) \cap f(Y)$. *Donner un exemple d'application linéaire* $f : E \to F$ *et de sous-espaces* X, Y *de* E *tels que* $f(X \cap Y) \neq f(X) \cap f(Y)$.

Exercice 7.6. *On considère l'application linéaire* $(a, b, c, d, e) \mapsto (a, d)$. *Déterminer son noyau et son image et leurs dimensions et vérifier le théorème du rang sur cet exemple.*

Exercice 7.7. *Mêmes questions pour l'application linéaire qui envoie* (a, b, c) *sur* $(a + b, b + c)$.

7.4 Injections, surjections, isomorphismes

Rappelons qu'une fonction $f : E \to F$ est dite *injective* si elle satisfait à l'une des conditions équivalentes suivantes :

1. Si $x, y \in E$ et si $x \neq y$, alors $f(x) \neq f(y)$;
2. si $x, y \in E$ et si $f(x) = f(y)$, alors $x = y$;
3. si $v \in F$, il existe au plus un $x \in E$ tel que $f(x) = v$ (on dit que tout v dans F a au plus un *antécédant* (ou *image inverse*) par f dans E).

On dit alors aussi que f est une *injection*.

Exemple 7.10. *La fonction de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *qui à* x *associe* x^2 *n'est pas injective ; en effet, on a* $1 \neq -1$ *mais* $f(1) = f(-1)$.

Exemple 7.11. *La fonction de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *qui à* x *associe* x^3 *est injective ; en effet, tout réel a une unique racine cubique. Donc,* $\forall v \in R$*, il existe au plus un* $x \in R$ *tel que* $f(x) = v$.

Exemple 7.12. *La fonction de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{N}$ *qui à* n *associe* $2n$ *est injective ; en effet, pour tout entier naturel* n *il existe au plus un entier naturel* p *tel que* $2p = n$.

Proposition 7.5. *Une application linéaire est injective si et seulement si son noyau est (le sous-espace) nul.*

Démonstration. Le noyau de f contient toujours 0. Supposons que f soit injective et soit $x \in \operatorname{Ker}(f)$. Alors $f(x) = 0 = f(0)$. Par injectivité (propriété 2. ci-dessus), on doit avoir $x = 0$. Donc $\operatorname{Ker}(f) = \{0\}$.

Réciproquement, supposons que $\operatorname{Ker}(f) = \{0\}$. Suposons que $f(x) = f(y)$. Alors $f(x-y) = f(x)-f(y) = 0$. Donc $x-y \in \operatorname{Ker}(f)$. Donc $x-y = 0$ et par suite $x = y$. Donc f est injective. $\square$

Rappelons qu'une fonction $f : E \to F$ est dite *surjective* si elle satisfait à l'une des conditions équivalentes suivantes :

1. Si $y \in F$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$;
2. $f(E) = F$;
3. si $v \in F$, il existe au moins un $x \in E$ tel que $f(x) = v$ (on dit que tout v dans E a au moins un *antécédant* (ou *image inverse*) par f dans E).

On dit alors aussi que f est une *surjection.*

Exemple 7.13. *La fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe x^2 n'est pas surjective ; en effet, il n'existe pas de $x \in \mathbb{R}$ tel que $-1 = x^2$.*

Exemple 7.14. *La fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe x^3 est surjective ; en effet, tout réel a une unique racine cubique. Donc, $\forall v \in R$, il existe au moins un $x \in R$ tel que $f(x) = v$.*

Exemple 7.15. *La fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ qui à $2n$ et $2n+1$ associe n est surjective ; en effet, tout entier naturel n est l'image par cette fonction de $2n$ (et aussi de $2n+1$).*

Une fonction est dite *bijective* si elle est injective et surjective. De manière équivalente, pour tout v dans F, il y a exactement un antécédant de v par f.

Dans ce cas, on dit aussi que c'est une *bijection.*

De plus, la fonction *inverse* (ou *réciproque*) de f, notée f^{-1}, est la fonction de $F \to E$ définie par :

$$\forall x \in E, \forall y \in F : y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y). \tag{1}$$

L'existence et l'unicité de la fonction inverse provient de ce qu'on a : pour tout $y \in F$, il existe un unique $x \in E$ tel que $y = f(x)$.

Si f est une bijection de E vers F, la fonction réciproque f^{-1} est aussi une bijection, de F vers E.

Exemple 7.16. *La fonction exponentielle est une bijection de* $\mathbb{R}$ *vers* $\mathbb{R}_+^*$ *; la bijection réciproque est la fonction logarithme.*

Définition 7.4. *Un* isomorphisme *est une application linéaire bijective. S'il existe un isomorphisme de* E *vers* F*, on dit que* E *est* F *sont* isomorphes.

Proposition 7.6. *Si* f *est un isomorphisme, alors la fonction réciproque* f^{-1} *est aussi un isomorphisme.*

Démonstration. Soit $f : E \to F$ un isomorphisme. Il suffit de montrer que f^{-1} est une application linéaire. Soient y, y' dans F. Il existe alors x, x' dans E tels que $y = f(x), y' = f(x')$ (car f est surjectif). Par linéarité de f, on a $y+y' = f(x+x')$. Par l'équation (1), on a $x = f^{-1}(y), x' = f^{-1}(y'), x+x' = f^{-1}(y+y')$. Donc $f^{-1}(y+y') = f^{-1}(y)+f^{-1}(y')$. Il s'ensuit que f^{-1} préserve la somme.

Pour le produit externe, c'est analogue. Donc f^{-1} est linéaire. □

Proposition 7.7. *Soient* E, F *des espaces vectoriels de dimension finie et* $f : E \to F$ *une application linéaire. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) f *est un isomorphisme ;*

(ii) toute base de E *est envoyée sur une base de* F *;*

(iIi) il existe une base de E *qui est envoyée par* f *sur une base de* F*.*

Nous notons $L(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E vers F (qui sont des espaces vectoriels).

Lemme 7.1. *Soit* $f \in L(E, F)$*.*

1. Si f *est injective, alors* f *envoie toute famille de vecteurs linéairement indépendants sur une famille de vecteurs linéairement indépendants.*

2. Si f *est surjective, alors* f *envoie toute famille génératrice sur une famille génératrice.*

Démonstration. 1. Soient $e_1, \dots e_n$ linéairement indépendants dans E. Montrons que $f(e_1), \dots, f(e_n)$ sont linéairement indépendants. Supposons qu'il existe $a_1, \dots, a_n$ dans $\mathbb{R}$ tels que $a_1 f(e_1) + \cdots + a_n f(e_n) = 0$. Alors $f(a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n) = 0$. Donc $a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n \in \mathrm{Ker}(f)$. Comme f est injective, on a $a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n = 0$. Par suite, les a_i sont tous nuls, car les e_i sont linéairement indépendants. On conclut donc que les $f(e_i)$ sont linéairement indépendants.

2. Soient $e_1, \dots e_n$ qui engendrent E. Soit y dans F ; comme f est surjective, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Il existe alors $a_1, \dots, a_n$ dans $\mathbb{R}$ tels que $x = a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n$. Alors $y = f(x) = f(a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n) = a_1 f(e_1) + \cdots + a_n f(e_n)$ et par suite $f(e_1), \dots, f(e_n)$ engendrent F. □

Preuve de la proposition 7.7. (i) implique (ii) : on suppose que f est un isomorphisme. Soit $e_1, \dots, e_n$ une base de E. Le lemme 7.1 implique que $f(e_1), \dots, f(e_n)$ est une base de F.

(ii) implique (iii) est évident.

(iii) implique (i) : soit $e_1, \dots, e_n$ une base de E telle que $f(e_1), \dots, f(e_n)$ est une base de F. Montrons que f est un isomorphisme. Soit $x \in \mathrm{Ker}(f)$, On peut écrire $x = a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n$, $a_i \in F$. Alors $0 = f(x) = a_1 f(e_1) + \cdots + a_n f(e_n)$. Comme les $f(e_i)$ sont linéairement indépendants, les a_i sont tous nuls, donc x est nul. Donc f est injective.

Soit maintenant $y \in F$. On peut écrire $y = a_1 f(e_1) + \cdots + a_n f(e_n)$. Soit $x = a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n$. Alors $y = f(x)$. □

Définition 7.5. *Un endomorphisme f de V est* inversible à gauche *(resp.* inversible à droite*) s'il existe un endomorphisme g de V (resp. un endomorphisme h de V) tel que $g \circ f = \mathrm{id}_V$ (resp. $f \circ h = \mathrm{id}_V$).*

Il est tout-à-fait analogue au cas des matrices (voir proposition 3.2) de montrer que si f a un inverse à gauche et un inverse à droite, alors les deux inverses sont égaux. On dit alors que f est *inversible*, ou que f est un *automorphisme*.

Corollaire 7.3. *Les conditions suivantes sont équivalentes, pour un endomorphisme f d'un espace vectoriel V de dimension finie :*

(i) f est un automorphisme de V ;

(ii) f est injectif;

(iii) f est surjectif.

Démonstration. Il est clair que (i) implique (ii) et (iii). Supposons que (ii) soit vrai. Soit $v_1, \dots, v_n$ une base de V. Alors les vecteurs $f(e_1, \dots, f(e_n)$ sont linéairement indépendants par le lemme 7.1. Ils forment donc une base de V par le théorème 6.3. Donc f est un automorphisme de V, c'est-à-dire (i) est vrai.

Pour prouver l'implication (iii) $\Rightarrow$ (i), c'est analogue. □

Corollaire 7.4. *Soit f un endomorphisme de V, espace vectoriel de dimension finie. Alors f est inversible à gauche si et seulement s'il est inversible à droite.*

Démonstration. Si f est inversible à gauche, il existe un endomorphisme g tel que $g \circ f = \mathrm{id}$. Alors f est injectif : en effet, si $f(x) = f(y)$, alors $g \circ f(x) = g \circ f(y)$, donc $x = y$. D'après le corollaire 7.3, f est donc un automorphisme, donc inversible à droite.

L'implication réciproque est similaire, en prouvant que f est surjective. $\square$

Proposition 7.8. *Le produit de deux isomorphismes est un isomorphisme.*

Démonstration. Nous savons que le produit de deux applications linéaires est une application linéaire. Et aussi que le produit de deux bijections est une bijection. $\square$

Exercice 7.8. *Quel est le noyau de l'application linéaire* $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ *qui à* (a, b) *associe* $(a, a+b, b, a-b)$ *? Est-elle injective ?*

Exercice 7.9. *Montrer que l'application linéaire de* $\mathbb{R}[x]$ *dans lui-même qui à un polynôme* P *associe* P' *(dérivé) est surjective, mais pas injective.*

Exercice 7.10. *Montrer que la l'application linéaire* $A \mapsto Tr(A)$, $M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *est surjective.*

Exercice 7.11. *Montrer que si* F, G *sont supplémentaires dans* E*, alors la fonction* $F \times G \to E$, $(x, y) \mapsto x + y$*, est un isomorphisme.*

Exercice 7.12. *Prouver les implications réciproques des deux implications du lemme 7.1.*

7.5 Applications linéaires et bases

Rappelons que $L(E, F)$ est un espace vectoriel (proposition 7.2) et que F^n est un espace vectoriel (voir 4.3).

Proposition 7.9. *Soit* E *un espace vectoriel de dimension finie, de base* $(e_1, \ldots, e_n)$*. La fonction* $L(E, F) \to F^n$*, qui à* $f \in L(E, F)$ *associe le* n*-uplet* $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ *est un isomorphisme d'espaces vectoriels.*

Démonstration. Notons $\psi : L(E, F) \to F^n$ cettte fonction. Elle préserve la somme : en effet, $\psi(f + g) = ((f + g)(e_1), \ldots, (f + g)(e_n)) = (f(e_1) + g(e_1), \ldots, f(e_n) + g(e_n)) = (f(e_1), \ldots, f(e_n)) + (g(e_1), \ldots, g(e_n)) = \psi(f) + \psi(g)$.

De plus, si $a \in \mathbb{R}$, alors $\psi(af) = (af(e_1), \ldots, af(e_n)) = a(f(e_1), \ldots, f(e_n)) = a\psi(f)$. Donc ψ préserve le produit externe. C'est une application linéaire.

Montrons que ψ est un isomorphisme. Si $\psi(f) = 0$, alors les $f(e_i)$ sont tous nuls. Donc $f(x) = 0$ pour tout $x \in E$ (car x est combinaison linéaire des e_i). Donc ψ est injective.

Soit maintenant $(v_1, \ldots, v_n) \in F^n$. Posons $f(\sum_i a_i e_i) = \sum_i a_i v_i$. Comme tout vecteur dans E est de manière unique combinaison linéaire des e_i, f est bien définie sur E. C'est pure routine que de vérifier que f est linéaire. Et on a $\psi(f) = (v_1, \ldots, v_n)$. Donc ψ est surjective. □

Corollaire 7.5. *Si $e_1, \ldots, e_n$ est une base E et si $v_1, \ldots v_n$ sont des vecteurs dans F, il existe une unique application linéaire de E vers F qui envoie chaque e_i sur v_i.*

Corollaire 7.6. *Deux espaces vectoriels de dimension finie sont isomorphes si et seulement s'ils ont la même dimension.*

Démonstration. Si E, F sont isomorphes, il existe un isomorphisme $f : E \to F$. Soit $e_1, \ldots, e_n$ une base de E. Alors $f(e_1), \ldots, f(e_n)$ est une base de F, d'après la proposition 7.7. Donc $\dim(F) = n = \dim(E)$.

Réciproquement, supposons que E, F aient la même dimension. Soient $e_1, \ldots, e_n$ une base de E et $v_1, \ldots, v_n$ une base de F. Il existe d'après le corollaire 7.5, une application linéaire qui envoie chaque e_i sur v_i. D'après la proposition 7.7, c'est un isomorphisme. □

Corollaire 7.7. *La dimension de $L(E, F)$ est $dim(E)dim(F)$.*

Exercice 7.13. *Soit $E = \mathbb{R}^2$ avec sa base canonique e_1, e_2 et $F = \mathbb{R}^3$. Soit f l'application linéaire de E dans F qui envoie e_1 sur $(1, 0, 1)$ et e_2 sur $(2, -1, 1)$. Avec les notations de la preuve de la proposition 7.9, calculer $\psi(f)$.*

Exercice 7.14. *Avec les notations de l'exercice 7.13, on suppose que $g \in L(E, F)$ et que $\psi(g) = ((1, 2, 3), (0, 1, 0) \in F^2$. Calculer $g(e_1), g(e_2)$, puis $g((1, 1))$.*

Exercice 7.15. *A quelle condition sur n les espaces vectoriels $\mathbb{R}^4$ et $M_{nn}(\mathbb{R})$ sont-ils isomorphes ? Meme question pour $\mathbb{R}^k$ et $M_{np}(\mathbb{R})$. Même question pour $L(E, F)$ et $M_{np}(\mathbb{R})$, avec l'hypothèse que $n = dim(E)$ et $p = dim(F)$.*

Exercice 7.16. *Quelle est la dimension de $L(E, F)$ avec les notations de l'exercice 7.13 ?*

7.6 Matrice d'une application linéaire et changement de bases

Proposition 7.10. *Soient E, F des espaces vectoriels de dimension p, n, et $e_1, \ldots, e_p$, $v_1, \ldots, v_n$ des bases de ces espaces, respectivement. Il y a isomorphisme entre l'espace des applications linéaires $L(E, F)$ et l'espace des* *matrices $M_{np}(\mathbb{R})$. Cet isomorphisme associe à toute application linéaire la matrice $[a_{ij}]$ définie par $f(e_j) = \sum_i a_{ij} v_i$.*

Remarquez que la matrice est bien définie, car $f(e_j)$ est de manière unique combinaions linéaire des v_i. Aussi que la taille de la matrice est $n \times p$ car les lignes correspondent aux éléments de la base v_j et les colonnes à ceux de la base e_i.

Démonstration. On sait qu'il y a un isomorphisme de $L(E, F)$ vers F^p, par la proposition 7.9 (attention : ici c'est p, là-bas c'est n) : l'isomorphisme envoie f sur le p-uplet $(f(e_1), \ldots, f(e_p))$. On fait suivre cet isomorphisme par la fonction qui envoie tout p-uplet $(u_1, \ldots, u_p)$ dans F^p sur la matrice $[a_{ij}]$ définie par les égalités $\forall j = 1, \ldots, p$, $u_j = \sum_{1 \leq i \leq n} a_{ij} v_i$; cette fonction est clairement un isomorphisme (exercice !). Le produit de ces deux isomorphismes est l'isomorphisme cherché. □

Définition 7.6. *On appelle* matrice de l'application linéaire $f \in L(E, F)$ dans les bases (e_j) et (v_i) de E et F respectivement *la matrice définie dans la proposition ci-dessus.*

Proposition 7.11. *Soit $f \in L(E, F)$, $g \in L(F, G)$, et (e_k), (f_j), (g_i) des bases de E, F, G respectivement. Soient A la matrice de f dans les bases (e_k), (f_j), et B la matrice de g dans les bases (f_j), (g_i). Alors la matrice de $g \circ f$ dans les bases (e_i), (g_k) est BA.*

On peut même dire que le produit des matrices a été défini pour que ce résultat soit vrai.

Démonstration. Soient $A = [a_{jk}], B = [b_{ij}], C = [c_{ik}]$ les matrices de $f, g, g \circ f$ respectivement. On a $f(e_k) = \sum_j a_{jk} f_j$ et $g(f_j) = \sum_i b_{ij} g_i$. Donc $\sum_i c_{ik} g_i = g \circ f(e_k) = g(\sum_j a_{jk} f_j) = \sum_j a_{jk} g(f_j) = \sum_j a_{jk} \sum_i b_{ij} g_i = \sum_i (\sum_j b_{ij} a_{jk}) g_i$. Ceci prouve que $c_{ik} = \sum_j b_{ij} a_{jk}$, donc que $C = BA$. □

Corollaire 7.8. *La matrice de l'inverse d'un isomorphisme est l'inverse de sa matrice.*

Démonstration. On applique la proposition précédente au cas où $E = G$ et où les bases (e_k) et (g_i) coïncident : d'abord au produit $f \circ f^{-1}$, puis au produit $f^{-1} \circ f$. □

Définition 7.7. *Soient deux bases $(e_i), (e'_i)$ d'un espace vectoriel E. La* matrice de passage de la base de (e_i) vers la base (e'_i) *est la matrice, notée $P_{ee'} = [p_{ij}]$, définie par $e'_j = \sum_i p_{ij} e_i$.*

Définition 7.8. *La* matrice d'un vecteur v dans la base (v_i) *de* V *est le vecteur colonne des coefficients de* v *dans la base* v_i*. C'est-à-dire le vecteur* $(a_1, \ldots, a_n)^t$ *où les coefficients* a_i *sont définis par* $v = \sum_i a_i v_i$*.*

Corollaire 7.9. *Si* X *(resp.* Y*) est la matrice colonne représentant un vecteur* x *de* E *(resp.* y *de* F*) dans une base de* E *(resp. de* F*), et* M *la matrice de* $f \in L(E, F)$ *dans ces bases, et si* $y = f(x)$*, alors* $Y = MX$*.*

Démonstration. On note f_j et e_i ces bases de F et E. On a, avec $M = [m_{ij}]$, $f(e_j) = \sum_i m_{ij} f_i$. De plus, avec $X = (x_j)^t$ et $Y = (y_i)^t$, on a $\sum_i y_i f_i = y = f(x) = f(\sum_j x_j e_j) = \sum_j x_j f(e_j) = \sum_j x_j \sum_i m_{ij} f_i = \sum_i (\sum_j m_{ij} x_j) f_i$; donc $y_i = \sum_j m_{ij} x_j$, d'où $Y = MX$. □

Proposition 7.12. *Soient* (e_i)*,* (e'_i) *deux bases de* E*.*

1. Si C, C' *sont les matrices d'un vecteur* x *de* E *dans les bases* (e_i) *et* (e'_i) *respectivement, alors* $C = P_{ee'} C'$*.*

2. L'inverse de $P_{ee'}$ *est* $P_{e'e}$*.*

3. Soient f*,* f' *deux bases de* F*. Soit* $f \in L(E, F)$ *et* A, A' *ses matrices dans les bases* e, f *d'une part, et* e', f' *d'autre part. Alors* $A' = P_{f'f} A P_{ee'}$*.*

Démonstration. En comparant les définitions 7.7 et 7.6, on observe que $P_{ee'}$ est égal à la matrice de l'identité de E dans les bases (e'_i), (e_i) (dans cet ordre !). L'assertion 2. découle donc de cette observation et du corollaire 7.8.

Pour 1. on applique cette observation et le corollaire 7.9.

Pour 3. la même observation et la proposition 7.11 s'appliquent : la matrice $P_{f'f} A P_{ee'}$ est la matrice (dans les bases appropriées) de l'application linéaire composée de trois applications linéaires : $\mathrm{id}_F \circ f \circ \mathrm{id}_E$. □

Définition 7.9. *La* matrice $[a_{ij}]$ d'un endomorphisme *de* V *dans la base* $v_1, \ldots, v_n$ *de* V *est définie par* $f(v_j) = \sum_i a_{ij} v_i$*,* $j = 1, \ldots, n$*.*

C'est donc un cas particulier de la définition ci-dessus, avec $E = F = V$, avec la même base au départ et à l'arrivée. De même, le corollaire suivant est un cas particulier de la proposition 7.11.

Corollaire 7.10. *Si* A, B *sont les matrices des endomorphismes* f *et* g *respectivement dans une base de* V*, alors la matrice de* $g \circ f$ *dans cette base est* BA*.*

Corollaire 7.11. *Une matrice carrée est inversible à gauche si et seulement si elle inversible à droite.*

Démonstration. Cela découle du corollaire précédent et de la proposition 7.4. □

Proposition 7.13. *Les deux matrices d'un endomorphisme donné dans deux bases de V sont conjuguées.*

Exercice 7.17. *On considère l'application linéaire f de l'exercice 7.13. Quelle est sa matrice dans les bases canoniques ? Prenez quelques vecteurs dans $\mathbb{R}^2$ et vérifiez le corollaire 7.9.*

Exercice 7.18. *On considère l'application linéaire f de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans les bases canoniques de ces espaces est*

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

Que valent n et p ? Calculer $f(e_1)$ et $f(e_2)$ (e_1, e_2 est la base canonique de $\mathbb{R}^2$). Calculer $f(-1,1)$ de deux manières : directement en écrivant $(-1,1)$ dans la base e_1, e_2 et en appliquant la linéarité ; puis en appliquant le corollaire 7.9.

Exercice 7.19. *On suppose que l'application linéaire $f : E \to F$ a la matrice $M \in M_{np}(\mathbb{R})$ dans les bases $e_1, \dots, e_p$ de E et $v_1, \dots, v_n$ de F. Montrer que le noyau de f contient le vecteur $e_1 + \cdots + e_p$ si et seulement si pour chaque ligne de M, la somme des ses coefficients est nulle (utiliser le corollaire 7.9).*

8 Déterminants

8.1 Développement selon la première colonne

Définition 8.1. *Soit $A = [a_{ij}]$ une matrice carrée d'ordre n. Le* déterminant *de A, noté* $\det(A)$ *ou aussi $|A|$, est défini récursivement comme suit : si $n = 1$, c'est a_{11} ; si $n \geq 2$, c'est $a_{11}\Delta_{11} - a_{21}\Delta_{21} + \ldots + (-1)^{n+1}a_{n1}\Delta_{n1}$, où Δ_{ij} est le déterminant de la matrice (de taille $n-1 \times n-1$)obtenue en supprimant dans A la i-ème ligne et la j-ème colonne.*

Proposition 8.1. *Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit de ses éléments diagonaux.*

Démonstration. Si la matrice est triangulaire supérieure, on a par définition du déterminant $\det(A) = a_{11}\Delta_{11}$. Par hypothèse de récurrence $\Delta_{11} = a_{22} \cdots a_{nn}$. D'où le résultat.

Si la matrice est triangulaire inférieure, alors Δ_{i1} est pour $i \geq 2$ le déterminant d'une matrice triangulaire dont la première ligne est nulle ; par hypothèse de récurrence son déterminant est nul. On a donc $\det(A) = a_{11}\Delta_{11}$ et on conclut comme dans le cas précédent. $\square$

Proposition 8.2. *Soient A, A', A'' trois matrices carrées qui ne diffèrent que par leur i-ème ligne (leurs i-emes lignes sont notées respectivement l_i, l'_i, l''_i).*

1. Si $l_i = l'_i + l''_i$; alors $\det(A) = \det(A') + \det(A'')$.

2. Si $l_i = al'_i$, alors $\det(A) = a\det(A')$.

Démonstration. Nous ne démontrons que la deuxième partie, l'autre étant analogue et laissée en exercice. Si $n = 1$, c'est clair. On a par définition $\det(A) = a_{11}\Delta_{11} - a_{21}\Delta_{21} + \ldots, \det(A') = a'_{11}\Delta'_{11} - a'_{21}\Delta'_{21} + \ldots$. Par hypothèse de récurrence sur n, $\Delta'_{k1} = a\Delta_{k1}$ si $k \neq i$. De plus $a'_{k1} = a_{k1}$ si $k \neq i$, $a'_{i1} = aa_{i1}$ et $\Delta'_{i1} = \Delta_{i1}$. Donc $\det(A') = a\det(A)$. $\square$

Proposition 8.3. *Soit B une matrice carrée obtenue de A par une opération de ligne. Si c'est une opération $l_i + al_j$, elles ont même déterminant. Si c'est une opération al_i, on a $\det(B) = a\det(A)$. Si c'est une opération (ij), on a $\det(B) = -\det(A)$.*

Lemme 8.1. *1. Si dans une matrice A, on échange deux lignes adjacentes, alors son déterminant est multiplié par -1.*

2. Si dans une matrice carrée, deux lignes sont égales, son déterminant est nul.

Démonstration. 1.Soit A' la matrice obtenue par l'échange. On a $\det(A) = a_{11}\Delta_{11} - a_{21}\Delta_{21} + \ldots, \det(A') = a'_{11}\Delta'_{11} - a'_{21}\Delta'_{21} + \ldots$. Si $k \neq i, i+1$, alors $\Delta'_{k1} = -\Delta_{k1}$ par hypothèse de récurrence ; de plus, $a_{k1} = a_{k1}$. On a aussi $a'_{i1} = a_{i+1,1}$, $a'_{i+1,1} = a_{i1}$, $\Delta'_{i1} = \Delta_{i+1,1}$, $\Delta'_{i+1,1} = \Delta_{i1}$. Donc $(-1)^{k+1}a'_{k1}\Delta'_{k1} = -(-1)^{k+1}a_{k1}\Delta_{k1}$ si $k \neq i, i+1$. Et $(-1)^{i+1}a'_{i1}\Delta'_{i1} = -(-1)^{i+2}a_{i+1,1}\Delta_{i+1,1}$ et enfin $(-1)^{i+2}a'_{i+1,1}\Delta'_{i+1,1} = -(-1)^{i+1}a_{i1}\Delta_{i1}$. Il découle de tout ceci que $\det(A') = -\det(A)$.

2. Supposons que dans la matrice A, $l_i = l_j$, avec $i < j$. Raisonnons par récurrence sur $j - i$. Si ceci vaut 1, soit A' obtenue en échangeant les deux lignes ; alors $A = A'$ et $\det(A) = \det(A')$. Mais d'après 1., on a $\det(A') = -\det(A)$. Donc $\det(A) = 0$. Supposons maintenant que $j - i \leq 2$. Soit B la matrice obtenue en échangeant dans A les lignes j et $j-1$. Alors $\det(B) = -\det(A)$ par 1. Dans B les lignes i et $j-1$ sont égales. Par hypothèse de récurrence (car $j - 1 - i < j - i$), on a $\det(B) = 0$. Donc $\det(A) = 0$. $\square$

Preuve de la proposition 8.3. Soit A' la matrice obtenue par l'opération de ligne.

1. Soit B obtenue de A en y remplaçant l_i par l_j. Alors $\det(B) = 0$ par le lemme 8.1. Par la proposition 8.2, on a $\det(A') = \det(A) + a\det(B)$. Donc $\det(A') = \det(A)$.

2. Déjà vu dans la proposition 8.2.

3. On suppose que l'opération échange les lignes i et j da A. Soit M (resp. B, resp. C) la matrice ayant les mêmes lignes que A, sauf la i-ème et la j-ème toutes deux égales à $l_i + l_j$ (resp. l_i, resp. l_j). D'après le lemme, le déterminant de ces trois matrices est nul. Mais d'après la proposition 8.2, utilisée trois fois, on a $\det(M) = \det(B) + \det(A) + \det(A') + \det(C)$. Donc $\det(A') = -\det(A)$. □

Corollaire 8.1. *Soit E une matrice élémentaire, obtenue en appliquant à la matrice identité une opération de ligne (voir la définition 3.4). Alors son déterminant est 1 si c'est une opération $l_i + al_j$, a si c'est une opération al_i, et -1 si c'est une opération (ij).*

Exercice 8.1. *Montrer que le déterminant de la matrice* $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix}$ *est égal à $(b-a)(c-a)(c-b)$. Généraliser à des tailles plus grandes.*

Exercice 8.2. *Soient $v = (a, b, c)$ et $v = (a', b', c')$ deux vecteurs non nuls dans $\mathbb{R}^3$. Montrer que si v, v' sont linéairement dépendants si et seulement si* $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = 0.$

8.2 Formule du produit et déterminant des endomorphismes

Théorème 8.1. *Soient A, B des matrices carrées de même taille. Alors $det(AB) = \det(A)\det(B)$.*

Lemme 8.2. *Si $B = EA$ où A, B, E sont des matrices carrées de même taille, avec E élémentaire alors,* $\det(B) = \det(E)\det(A)$.

Démonstration. Cela découle des propositions 3.5, 8.3 et du corollaire 8.1. □

Preuve du théorème 8.1. 1. Si A est une matrice élémentaire, alors la formule est vraie par le lemme 8.2.

2. Supposons que A soit inversible. Alors, grâce au corollaire 3.3, A est un produit de k matrices élémentaires, $A = E_1 \cdots E_k$. Si $k = 1$ on conclut grâce

à 1. Supposons que $k \geq 2$. On alors $\det(AB) = \det(E_1(E_2 \cdots E_k B)) = \det(E_1)\det(E_2 \cdots E_k B)$ (par 1.) $=$ $\det(E_1)\det(E_2 \cdots E_k)\det(B)$ (par récurrence sur k) $= \det(A)\det(B)$ (par le cas 1).

3, Supposons que A ne soit pas inversible. Alors il existe une matrice inversible (produit de matrices élémentaires) P telle que PA soit échelonnée réduite. Cette matrice n'est pas inversible (sinon A le serait), donc sa dernière ligne est nulle (si elle ne l'était pas, ça serait la matrice identité). Alors la dernière ligne de PAB est nulle. Le déterminant d'une matrice dont la dernière ligne est nulle est nul (multiplier par -1 cette dernière ligne et appliquer la proposition 8.2). Donc $\det(PA) = \det(PAB) = 0$. Mais nous savons déjà que $\det(PA) = \det(P)\det(A)$ et $\det(PAB) = \det(P)\det(AB)$. Le déterminant de P est non nul, car P est produit de matrices élémentaires, et que son déterminant est le produit de leurs déterminants (par 2.), qui sont non nuls par le corollaire 8.1. Donc $\det(A) = 0 = \det(AB)$. D'où $\det(AB) = \det(A)\det(B)$. $\square$

Corollaire 8.2. *Le déterminant du produit de plusieurs matrices est égal au produit de leurs déterminants.*

Démonstration. On utilise le théorème et on fait une récurrence sur le nombre de matrices dans le produit. $\square$

8.3 Inversion des matrices et déterminants

Théorème 8.2. *Une matrice carrée A est inversible si et seulement si son déterminant est non nul. Dans ce cas, l'élément en position i, j de A^{-1} est $\frac{(-1)^{i+j}\Delta_{ji}}{\det(A)}$.*

Lemme 8.3. *$\sum_j (-1)^{j+k} a_{ij}\Delta_{kj} = \delta_{ik}\det(A)$.*

Démonstration. $\square$

Preuve du théorème 8.2. Si A est inversible, d'inverse B, alors $AB = I$, et d'après le théorème 8.1, $\det(A)\det(B) = \det(I) = 1$. Donc $\det(A)$ est inversible.

Réciproquement, supposons que $\det(A)$ soit non nul. Posons $b_{ij} = \frac{(-1)^{i+j}\Delta_{ji}}{\det(A)}$, et soit $B = [b_{ij}]$. On a $\sum_j a_{ij}b_{jk} = \sum_j a_i j \frac{(-1)^{k+j}\Delta_{kj}}{\det(A)} = \frac{1}{\det(A)}\sum_j (-1)^{j+k} a_{ij}\Delta_{kj}$. Par le lemme, ceci vaut δ_{ik}. Donc $AB = I$. On a aussi $BA = I$ d'après le corollaire 7.11. $\square$

Corollaire 8.3. *Le déterminant d'une matrice est égal à celui de sa transposée.*

Démonstration. Par le corollaire 8.1, c'est vrai pour les matrices élémentaires. C'est donc vrai pour tout produit de matrices élémentaires (corollaire 8.2), donc pour toute matrice inversible (corollaire 3.3). Pour traiter le cas d'une matrice non inversible, on applique le théorème 8.2 et la proposition 3.4. □

Exercice 8.3. *Déduire du théorème l'inverse d'une matrice carrée d'ordre 2.*

8.4 Développement du déterminant selon une ligne ou colonne quelconque

Les formules qui suivent s'appellent "formules de Laplace".

Théorème 8.3. *Le déterminant d'une matrice $A = (a_{ij})$ carrée d'ordre n s'obtient par l'une des $2n$ formules suivantes :*

$$\det(A) = (-1)^{i+1}a_{i1}\Delta_{i1} + (-1)^{i+2}a_{i2}\Delta_{i2} + \cdots + (-1)^{i+n}a_{in}\Delta_{in}$$

(développement selon la i-ème ligne) ;

$$\det(A) = (-1)^{j+1}a_{1j}\Delta_{1j} + (-1)^{j+2}a_{2j}\Delta_{2j} + \cdots + (-1)^{j+n}a_{nj}\Delta_{nj}$$

(développement selon la j-ème colonne).

8.5 Système de Cramer (suite)

Théorème 8.4. *L'unique solution du système de Cramer $AX = B$ est déterminée par : soit D_i le déterminant de la matrice obtenue à partir de A en y remplaçant la i-ème colonne par B ; alors $x_i = D_i/\det(A)$.*

9 Diagonalisation

9.1 Valeurs et vecteurs propres d'un endomorphisme

Définition 9.1. *Soit f un endomorphisme de l'espace vectoriel V. On dit que $\lambda \in \mathbb{R}$ est une* valeur propre *de f s'il existe un vecteur v non nul dans V tel que $f(v) = \lambda v$. Un tel vecteur est alors appelé* vecteur propre*, et on dit qu'il est* attaché à la valeur propre *λ.*

Remarquez qu'un vecteur propre est, par définition, toujours non nul.

Exemple 9.1. *Si v non nul est dans le noyau de f, alors v est un vecteur propre, attaché à la valeur propre* 0.

Proposition 9.1. *Un endomorphisme de V a la valeur propre λ si et seulement si $f - \lambda\,\mathrm{id}$ n'est pas un automorphisme de V.*

Démonstration. Si λ est une valeur propre de f, alors il existe v non nul tel que $f(v) = \lambda v$. Donc $(f - \lambda\,\mathrm{id})(v) = 0$. Donc $f - \lambda\,\mathrm{id}$ n'est pas un automorphisme de V, car non injectif (proposition 7.5).

Réciproquement, si $f - \lambda\,\mathrm{id}$ n'est pas un automorphisme de V, alors $f - \lambda\,\mathrm{id}$ n'est pas injectif (proposition 7.3). Donc $Ker(f - \lambda\,\mathrm{id}) \neq 0$. Il existe donc $v \neq 0$ dans V tel que $(f - \lambda\,\mathrm{id})(v) = 0$. C'est-à-dire : $f(v) = \lambda v$. Donc λ est une valeur propre de f. □

Le *déterminant* d'un endomorphisme de V est par définition le déterminant de sa matrice dans une base de V. Ceci est bien défini, car si on change de base, alors on conjugue la matrice (proposition 7.13), et par suite le déterminant reste le même.

Il découle de la proposition 7.8 et du théorème 8.2 qu'un endomorphisme est un automorphisme si et seulement si son déterminant est non nul. On obtient donc le

Corollaire 9.1. *Un endomorphisme a la valeur propre λ si et seulement le déterminant de $f - \lambda\,\mathrm{id}$ est nul.*

Exercice 9.1. *Montrer que si un automorphisme f a la valeur propre λ, alors f^{-1} a la valeur propre λ^{-1}.*

Exercice 9.2. *(requiert un peu d'analyse) Soit F l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions indéfiniment dérivables de $\mathbb{R}$ dans lui-même. Soit D l'endomorphisme de V qui envoie tout $f \in F$ sur sa dérivée. Montrer que la fonction $f(t) = e^{\lambda t}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, est un vecteur propre de D attaché à la valeur propre λ.*

Exercice 9.3. *Soit M la matrice d'un endomorphisme de V dans la base $v_1, \ldots, v_n$ de V. Montrer que $v_1 + \cdots + v_n$ est un vecteur propre pour la valeur propre 1 de f si et seulement si la somme de chaque ligne de M est égale à 1.*

Exercice 9.4. *Si $f(x, y) = (y, x)$, f endomorphisme de $\mathbb{R}^2$, montrer que f a les valeurs propres 1 et -1 et calculer des vecteurs propres correspondants.*

Exercice 9.5. *Si $f(x, y, z) = (y, z, x)$, f endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, montrer que f a la valeurs propres 1 et calculer un vecteur propre correspondant.*

9.2 Polynôme caractéristique

On va parler dans cette partie de matrices carrées dont les coefficients sont des polynômes en la variable x, et de leur déterminants. Cela est un tantinet plus avancé que les déterminants des matrices carrées à coefficients réels, comme vus en section 8.

Pour calculer ces déterminants, on procède par la formule de Laplace, et aussi par les formules usuelles pour les matrices carrées d'ordre 2 ou 3. La principale propriété dont nous aurons besoin est la formule du produit.

Exemple 9.2. *Soit la matrice* $M = \begin{bmatrix} x-1 & -2 \\ -3 & x-4 \end{bmatrix}$*. Son déterminant est* $(x-1)(x-4) - (-2)(-3) = x^2 - x - 4x + 4 - 6 = x^2 - 5x - 2$.

Définition 9.2. *Soit* $A = [a_{ij}]$ *une matrice carrée d'ordre* n*. Son* polynôme caractéristique *est le déterminant de la matrice* $xI_n - A$*.*

Notons que xI_n désigne la matrice dont tous les coefficients diagonaux valent x, et les autres sont nuls.

Exemple 9.3. *Le polynôme caractéristique de la matrice* $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ *est* $x^2 - 5x - 2$*, conformément à l'exemple précédent.*

Proposition 9.2. *Si deux matrices carrées* A, B *sont conjuguées, elles ont le même polynôme caractéristique.*

Démonstration. On a $B = P^{-1}AP$. Alors $xI - B = P^{-1}(xI - A)P$. On prend les déterminants, on utilise la formule du produit, en remarquant que $det(P^{-1}) = det(P)^{-1}$, et on en déduit le résultat. □

Corollaire 9.2. *Soit* V *un espace vectoriel de dimension finie,* f *une endomorphisme de* V *et* A, B *ses matrices dans deux bases de* V*. Alors ces deux matrices ont même polynôme caractéristique.*

Démonstration. Appliquer la proposition 7.13. □

Le corollaire implique la cohérence de la définition qui suit.

Définition 9.3. *Le* polynôme caractéristique d'un endomorphisme *de* V *est le polynôme caractéristique de sa matrice dans une base de* V*.*

Théorème 9.1. *Soit* f *un endomorphisme de* V *de dimension finie. Alors* λ *est une valeur propre de* V *si et seulement si* λ *est une racine de son polynôme caractéristique.*

Cela découle du corollaire 9.1.

Exercice 9.6. *Calculer le polynôme caractéristique des endomorphismes des exercices 9.4 et 9.5. Vérifiez le théorème 9.1 sur ces exemples.*

Exercice 9.7. *Calculer les valeurs propres de l'endomorphisme dont le polynôme caractéristique est $x^2 - 5x + 6$. Trouver une matrice qui a ce polynôme caractéristique. Calculer des vecteurs propres de l'endomorphisme associé pour chacune des valeurs propres.*

Exercice 9.8. *Calculer le polynôme caractérisrique d'un endomorphisme dont la matrice est triangulaire supérieure. Montrer que les valeurs propres sont les éléments diagonaux de la matrice.*

9.3 Endomorphisme diagonalisable

Définition 9.4. *Un endomorphisme de V est dit* diagonalisable *s'il existe une base de V formé de vecteurs propres de f.*

On a donc la

Proposition 9.3. *Un endomorphisme f de V, espace vectoriel de dimension finie, est diagonalisable, si et seulement si V a une base où la matrice de f est diagonale. Dans ce cas, les éléments diagonaux sont les valeurs propres de f.*

Les endomorphismes sont loin d'être tous diagonalisables. Par exemple l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ qui envoie (x, y) sur $(y, 0)$. Sa matrice dans la base canonique est $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Son unique valeur propre est 0. Si f était diagonalisable, sa matrice dans une base de vecteurs propres serait nulle. Donc $f = 0$, ce qui n'est pas.

Théorème 9.2. *Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n. Si le polynôme caractéristique de f a n racines distinctes, alors f est diagonalisable.*

Cette condition suffisante, mais elle n'est pas nécessaire, comme le montre l'exemple de la fonction identité d'un espace de dimension au moins 2. De même la fonction nulle.

Démonstration. Supposons que f a n valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, qui sont distinctes. Soient $e_1, \ldots, e_n$ des vecteurs attachés respectivement à ces valeurs propres. Montrons que ces vecteurs forment une base de E. Il suffit, en vertu du théorème 6.3, de montrer qu'ils sont linéairement indépendants.

Ecrivons, par l'absurde, qu'une combinaison linéaire non triviale des e_i est nulle. En se restreignant aux e_i dont le coefficient est non nul, on peut écrire $a_1 e_{i_1} + \cdots a_k e_{i_k} = 0$, avec des coefficients non nuls $a_1, \ldots, a_k$ et des indices i_j dans $\{1, \ldots, n\}$ et de plus $i_1 < \ldots < i_k$. On peut supposer que k est le plus petit possible. On ne peut avoir $k = 1$, car les vecteurs propres sont non nuls. On a donc $k \geq 2$. Appliquons f à la relation précédente. Ça donne $a_1 \lambda_{i_1} e_{i_1} + a_2 \lambda_{i_2} e_{i_2} + \cdots a_k \lambda_{i_k} e_{i_k} = 0$. Si λ_{i_1} est nul, on obtient une relation plus courte (car les autres λ_j sont alors non nuls), ce qui contredit la minimalité de k. Si λ_{i_1} est non nul, divisons par λ_{i_1} : ça donne $a_1 e_{i_1} + a_2 \frac{\lambda_{i_2}}{\lambda_{i_1}} e_{i_2} + \cdots + a_k \frac{\lambda_{i_k}}{\lambda_{i_1}} e_{i_k} = 0$. Soustrayons la relation ci-dessus : nous obtenons $a_2 (\frac{\lambda_{i_2}}{\lambda_{i_1}} - 1) e_{i_2} + \cdots + a_k (\frac{\lambda_{i_k}}{\lambda_{i_1}} - 1) e_{i_k} = 0$. C'est une relation plus courte (car les λ_j sont distincts, donc les nouveaux coefficients sont non nuls), ce qui contredit la minimalité de k aussi. □

9.4 Diagonalisation des matrices

Définition 9.5. *Soit A une matrice carrée d'ordre n. Soit f l'endomorphisme de l'espace vectoriel des colonnes $V = M_{n1}$ dont M est la matrice. Autrement dit, si $v \in V$, alors $f(v) = Mv$. Les* valeurs propres *(resp.* vecteurs propres*) de M sont les valeurs propres (resp. vecteurs propres) de f. La matrice A est dite* diagonalisable *si f est diagonalisable*

Autrement dit : v est un vecteur propre de la matrice M, attaché à la valeur propre λ, si $v \neq 0$ et si $Mv = \lambda v$.

Proposition 9.4. *1. Les valeurs propres de A sont les racines du polynôme caractéristique de A.*

2. Une matrice carrée est diagonalisable si et seulement si elle est conjuguée à une matrice diagonale.

Ceci découle des sections précédentes.

Exercice 9.9. *Montrer qu'une matrice $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ telle que $(a-d)^2 + 4bc > 0$ est diagonalisable.*

Exercice 9.10. *On suppose que le polynôme caractéristique d'une matrice carrée d'ordre n est égal à $(x-1)(x-2)\cdots(x-n)$. Montrer que cette matrice est diagonalisable.*

10 Espaces euclidiens

10.1 Produits scalaires et bases othonormales

Définition 10.1. *Soit E une espace vectoriel. Un* produit scalaire *sur E est une fonction de $E \times E$ vers $\mathbb{R}$, qu'on note $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$, avec les propriétés suivantes :*

— *si on fixe $x \in E$, la fonction $y \mapsto \langle x, y \rangle$ est linéaire ;*
— *si on fixe $y \in E$, la fonction $x \mapsto \langle x, y \rangle$ est linéaire ;*
— $\forall x, y \in E$, $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$;
— $\forall x \in E$, $\langle x, x \rangle \geq 0$;
— $\forall x \in E$, $\langle x, x \rangle = 0$ *si et seulement si* $x = 0$.

Un espace euclidien *est un espace vectoriel de dimension finie avec un produit scalaire.*

Exemple 10.1. *Avec $E = \mathbb{R}^n$, on définit pour $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n)$, $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$. C'est un produit scalaire sur E, appelé produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.*

Exercice 10.1. *Montrer que si x, y sont des vecteurs d'un espace euclidien et a, b des scalaires, alors $\langle ax, by \rangle = ab\langle x, y \rangle$. Plus généralement, que $\langle \sum_i a_i x_i, \sum_j b_j y_j \rangle = \sum_{i,j} a_i b_j \langle x_i, y_j \rangle$.*

Exercice 10.2. *Avec $E = M_{np}(\mathbb{R})$, montrer que la fonction $(A, B) \mapsto \mathrm{Tr}(AB^t)$ est un produit scalaire.*

Exercice 10.3. *Avec $E =$ l'espace vectoriel des fonctions continues $[0, 1] \to \mathbb{R}$, montrer que la fonction $(f, g) \mapsto \int_0^1 f(x)g(x)dx$ est un produit scalaire.*

10.2 Orthonormalisation de Gram-Schmidt

Deux vecteurs d'un espace euclidien sont dits *orthogonaux* si leur produit scalaire est nul.

Définition 10.2. *1. Une* base orthogonale *d'un espace euclidien est une base $e_1, \ldots, e_n$ telle que $\forall i \neq j$, on a $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ (autrement dit $e_, e_j$ sont orthogonaux).*

2. Une base orthonormale *d'un espace euclidien est une base othogonale $e_1, \ldots, e_n$ telle que $\forall i$, on a $\langle e_i, e_i \rangle = 1$.*

Si on note $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ et $= 0$ si $i \neq j$, une base othonormale satisfait $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$.

Théorème 10.1. *Soit* $e_1, \ldots, e_n$ *une base de* E *espace euclidien. Il existe une unique base orthonormale* $v_1, \ldots, v_n$ *de* E *telle que :* $\forall j = 1, \ldots, n$, $Vect(e_1, \ldots, e_j) = Vect(v_1, \ldots, v_j)$ *et que* $\langle e_j, v_j \rangle > 0$.

La notation $Vect(e_1, \ldots, e_j)$ désigne le sous-espace de E engendré par $e_1, \ldots, e_j$.

Démonstration. 1. Construisons d'abord une base orthogonale $u_1, \ldots, u_n$ qui satisfait les conditions de l'énoncé. Posons $u_1 = e_1$. Supposons que $j \geq 2$ et qu'on ait construit $u_1, \ldots, u_{j-1}$, orthogonaux deux à deux, avec $Vect(u_1, \ldots, u_{j-1}) = Vect(e_1, \ldots, e_{j-1})$, et construisons u_j de la forme $u_j = e_j + a_1 u_1 + \cdots + a_{j-1} u_{j-1}$. On veut que $\langle u_j, u_k \rangle = 0$ pour $k = 1, \cdots, j-1$. C'est-à-dire $0 = \langle e_j + a_1 u_1 + \cdots + a_{j-1} u_{j-1}, u_k \rangle = \langle e_j, u_k \rangle + a_k \langle u_k, u_k \rangle$, car les $\langle u_h, u_k \rangle$ sont nuls si $h \neq k$. Ceci détermine a_k de manière unique. On a bien $\langle e_j, u_j \rangle = \langle u_j - a_1 e_1 - \cdots - a_{j-1} u_{j-1}, u_j \rangle = \langle u_j, u_j \rangle > 0$. De plus $Vect(e_1, \ldots, e_j) = Vect(u_1, \ldots, u_j)$ (voir l'exercice 5.8).

2. On pose maintenant $v_j = u_j / \sqrt{\langle u_j, u_j \rangle}, j = 1, \ldots, n$. Ces vecteurs satisfont la conclusion du théorème (voir les exercices 10.4 et 5.9).

3. L'unicité se vérifie en suivant la construction précédente.

□

Corollaire 10.1. *Un espace euclidien possède une base orthonormale.*

Exercice 10.4. *Soit* $u_1, \ldots, u_n$ *une base orthogonale. Soit* $a_i = \frac{1}{\sqrt{\langle u_i, u_i \rangle}}$. *Montrer que* $a_1 u_1, \ldots, a_n u_n$ *est une base orthonormale.*

Exercice 10.5. *Montrer que la fonction* $N : E \to E$, $v \mapsto \sqrt{\langle v, v \rangle}$ *satisfait : pour tout scalaire* a, $N(av) = |a| N(v)$.

Exercice 10.6. *Soit* $E = \mathbb{R}^2$ *avec le produit scalaire canonique. Soit* $e_1 = (1, 1)$, $e_2 = (1, 0)$. *Appliquer l'algorithme de la preuve du théorème 10.1 à ces deux vecteurs et calculer la base orthonormale* v_1, v_2.

Exercice 10.7. *Soit* E *un espace euclidien et* $v \in E$. *Montrer que l'ensemble des vecteurs orthogonaux à* v *est un sous-espace de* E.

Exercice 10.8. *A quelle condition un vecteur* $v \in \mathbb{R}^n$, *avec son produit scalaire canonique, est-il orthogonal à* $(1, 1, \ldots, 1)$ *?*

Exercice 10.9. *Soit* E *un espace euclidien. Si* $H \subset E$, *on note* $H^\perp$ *l'ensemble* $\{v \in E, \forall h \in H, < h, v >= 0\}$. *Montrer que* $H^\perp$ *est un sous-espace de* E. *Montrer que* $H \cap H^\perp = 0$.

10.3 Diagonalisation des matrices symétriques

Théorème 10.2. *Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E. Il existe un unique endomorphisme u^* de E tel que : $\forall x, y \in E$, $\langle u(x), y\rangle = \langle x, u^*(y)\rangle$. Dans toute base othonormale de E, la matrice de u^* est la transposée de celle de u*

Démonstration. 1. Soit $e_1, \ldots, e_n$ une base orthonormale de E. Définissons u^* par : (*) $u^*(e_j) = \sum_i \langle u(e_i), e_j\rangle e_i$. La matrice de u^* dans cette base est $[\langle u(e_i), e_j\rangle]_{ij}$. Celle de u est $[m_{ij}]$ avec $u(e_j) = \sum_i m_{ij} e_i$. Par orthonormalité, on a $\langle u(e_j), e_i\rangle = m_{ij}$. Donc les matrices de u et u^* sont transposées l'une de l'autre.

2. Considérons la fonction $B : E \times E \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \langle u(x), y\rangle - \langle x, u^*(y)\rangle$ Pour $x = e_i$ et $y = e_j$, on a $\langle u(e_i), e_j\rangle = \langle u^*(e_j), e_i\rangle$, en utilisant (*). Donc $B(e_i, e_j) = 0$ pour tous i, j. Il s'ensuit que $B = 0$ (voir exercice 10.10). D'où l'existence et l'unicité de u^* et l'assertion sur les matrices.

Comme l'égalité dans le théorème est indépendant des bases, on conclut que les matrices de u et u^* sont transposées dans toute base orthonormale. □

Définition 10.3. *1. On appelle* adjoint *de u l'endomorphisme, noté u^*, défini dans le théorème précédent.*

2. On dit que u est symétrique *si $u = u^*$.*

Autrement dit : u est symétrique si $\langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle$ pour tous vecteurs x, y dans E.

Corollaire 10.2. *u est symétrique si et seulement sa matrice dans une base orthonormale est symétrique (et alors elle l'est dans toutes).*

Théorème 10.3. *Si u est un endomorphisme symétrique de E euclidien, il existe une base orthonormale de E où la matrice de u est diagonale.*

Preuve par récurrence sur la dimension de E. Soit M la matrice de u dans une certaine base orthonormale de E ; nous savons que M est symétrique. Le polynôme caractéristique de M a une racine complexe ; il existe doncu ne valeur propre complexe λ de E. On va montrer que $\lambda \in \mathbb{R}$. Il existe un vecteur colonne sur $\mathbb{C}$ tel que $Mv = \lambda v$. On a donc $M\bar{v} = \bar{\lambda}\bar{v}$, où $\bar{z}$ désigne la conjugaison des nombre complexes. Donc $\bar{\lambda} v^t \bar{v} = v^t(\bar{\lambda}\bar{v}) = v^t M \bar{v} = (v^t M \bar{v})^t = \bar{v}^t M v = \bar{v}^t \lambda v = \lambda \bar{v}^t v = \lambda v^t \bar{v}$.

Ecrivons $v = (a_1, \ldots, a_n)^t$. Alors $v^t \bar{v} = \sum_i |a_i|^2$. Ce nombre est non nul, car $v \neq 0$, et par suite $\bar{\lambda} = \lambda$. Donc λ est réel.

Soit $v \in \mathbb{R}^n$ un vecteur propre de M pour la valeur propre λ ; on peut supposer que $\langle v, v\rangle = 1$. Soit D la droite $\mathbb{R}v$ et $F = \{x \in \text{E}, \langle x, v\rangle = 0\}$; F est un sous-espace vectoriel de E (exercice 10.9). Nous montrons que $u(F) \subset F$: si $x \in F$, alors $\langle u(x), v\rangle = \langle x, u(v)\rangle = \langle x, \lambda v\rangle = \lambda\langle x, v\rangle = 0$; donc $u(x) \in F$. Donc u est un endomorphisme de F, qui est, par restriction du produit scalaire de E, un espace euclidien. De plus, la restriction de u à F est symétrique. Il existe donc, par hypothèse de récurrence une base orthonormale de F où la matrice de u est orthonormale. En complétant par v cette base, on obtient une base orthonormale de E, où la matrice de u est diagonale. □

Corollaire 10.3. *Une matrice symétrique est diagonalisable et toutes ses valeurs propres sont réelles.*

Démonstration. On considère l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^n$ qui a M comme matrice dans la base canonique. E est un espace euclidien avec le produit scalaire usuel. Par le corollaire 10.2, c'est un endomorphisme symétrique. On conclut par le théorème 10.3. □

Exercice 10.10. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie, avec base $v_1, \ldots, v_n$. On considère une* forme bilinéaire *sur E, c'est-à-dire, une fonction $B : E \times E \to \mathbb{R}$ telle que pour x fixé, $y \mapsto B(x, y)$ est linéaire, et symétriquement pour y fixé, $x \mapsto B(x, y)$ est linéaire. On suppose que pour tous i, j, $B(v_i, v_j) = 0$. Montrer que $B = 0$.*

Exercice 10.11. *Démontrer directement le fait qu'une matrice symétrique sur $\mathbb{R}$ de taille 2×2 a toutes ses valeurs propres réelles. Indication : montrer que le discriminant du polynôme caractéristique de la matrice est ≥ 0. Indication : utiliser l'identité $(a + d)^2 - 4ad = (a - d)^2$.*

Exercice 10.12. ** Faire l'analogue de l'exercice précédent pour les matrices symétriques réelles de taille 3×3.*

11 Solutionnaire (esquisses)

Exercice 2.1 $x = 4 - 2y$, donc $3(4 - 2y) + 7y = 2$, donc $y = -10$ et enfin $x = 24$. Il y a une solution unique.

Exercice 2.2 $x = 1 + y + z$. Donc $2 + 2y + 2z + 3y - 2z = 7$ et $3 + 3y + 3z + 2y - 3z = 8$; c'est-à-dire $5y = 5$ (les deux équations donnent la même chose). Solution : z est une variable libre et on a $y = 1, x = 2 + z$.

Exercice 2.3 $a = 1 + b - c$. Donc $2 + 2b - 2c + 3b + 4c = 4$ et $3 + 3b - 3c + 2b + 5c = 8$; c'est-à-dire $5b + 2c = 2$ et $5b + 2c = 2$. Pas de solution.

Exercice 2.4 $i = -j - k - l$. Donc $-j - k - l + j + k - l = 4$, $-j - k - l + j - k + l = -4$, et $-j - k - l - j + k + l = 2$. Donc $-2l = 4$, $-2k = -4$, $-2j = 2$. Donc $l = -1, k = 2, j = -1$. Enfin $i = 1$. Solution unique.

Exercice 3.1 $\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$

Exercice 3.2 Prendre $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Exercice 3.3 0

Exercice 3.4 Faire le calcul pour $n = 0, 1, 2, 3$ et puis montrer que la puissance n-ème ne dépend que du reste de la division entière de n par 4.

Exercice 3.5 3^{n-1}.

Exercice 3.9 b) La trace de I est non nulle.

Exercice 3.13 Récurrence sur n. Pour le contre-exemple, on peut prendre $n = 2$ et $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Exercice 3.14 Si C est un inverse à droite de AB, alors $ABC = I$ et donc BC est un inverse à droite de A.

Exercice 3.15 Comme $BA = 0$, on obtient en multipliant à droite par l'inverse à droite C de A : $BAC = 0C = 0$; donc $BI = 0$ et enfin $B = 0$.

Exercice 3.16 b) L'inverse est $R(-t)$.

Exercice 3.17 $AB = BA$ implique par multiplication à gauche et à droite par B^{-1} : $B^{-1}ABB^{-1} = B^{-1}BAB^{-1}$. Ceci implique $B^{-1}AI = IAB^{-1}$ et enfin $B^{-1}A = AB^{-1}$. Donc A et B^{-1} commutent. Pour montrer que A^{-1} et B^{-1} commutent, on multiplie la dernière égalité à gauche et à droite par A^{-1}.

Exercice 3.18 a) $(I + A^{-1})A(I + A)^{-1} = (A + I)(I + A)^{-1} = I$. Le produit de l'autre côté est analogue et donne aussi I. b) $(I + A^{-1})^{-1} + (I + A)^{-1} = A(I + A)^{-1} + (I + A)^{-1} = (A + I)(I + A)^{-1} = I$.

Exercice 3.19 On a $0 = A - A^2 = A(I - A)$. Si $I - A$ était inversible, on obtient $A = 0$ en multipliant à droite par l'inverse de $I - A$.

Exercice 3.20 On vérifie que $J^2 = J$. Donc $(I - J)J = J - J^2 = 0$. Si J était inversible, on aurait $I - J = 0$, ce qui n'est pas. Si $I - J$ était inversible, on aurait $J = 0$, ce qui n'est pas.

Exercice 3.21 On a $A = P.P^{-1}A$ et par suite $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(P^{-1}AP$, en utilisant que $\mathrm{Tr}(BC) = \mathrm{Tr}(CB)$.

Exercice 3.22 $(I + rA)(I + sA) = I + (r + s + rs)A$. Si $r \neq -1$, soit $s = \frac{-r}{r+1}$. Alors $r + s + rs = 1$, donc $I + sA$ est l'inverse de $I + rA$. Cas où $r = -1$: $I - A$ n'est pas inversible, voir exercice refA2=A.

Exercice 3.23

Exercice 3.23 Montrons que $M := Q[A, B]$ est égal à $[QA, QB]$. NB : Q, A, B sont de taille $n \times n$ et $[A, B]$ est de taille $n \times 2n$. Supposons $k \leq n$; alors le coefficient j, k de $[A, B]$ est a_{jk} ; donc $m_{ik} = \sum_j q_{ij} a_{jk} = (QA)_{ik}$, qui est égal au coefficient i, k de QA. Supposons $k > n$; alors le coefficient j, k de $= [A, B]$ est $b_{j,k-n}$; alors $m_{ik} = \sum_j q_{ij} b_{j,k-n} = (QB)_{i,k-n}$, qui est égal au coefficient i, k de $[QA, QB]$.

Supposons que $[A, I]$ soit transformé en $[B, P]$. Il existe alors une matrice inversible (car produit de matrices élémentaires) Q telle que $[B, P] = Q[A, I]$. Donc $B = QA$ et $P = Q$. Donc $B = PA$.

Exercice 3.24 Pour (ii), on utilise le fait qu'on peut inverser les opérations de lignes.

Exercice 3.25 Montrons que $C = C'$: en effet C s'obtient en ajoutant à la ligne i la ligne j multipliée par a, puis la ligne k multipliée par b. De plus, C' s'obtient en ajoutant à la ligne i la ligne k multipliée par b, puis la ligne j multipliée par a. Notons L_i la ligne i de A. Dans les deux cas, on obtient la matrice obtenue à partir de A en y remplaçant la ligne L_i par $L_i + aL_j + bL_k$.

Soient P, Q les matrices élémentaires correspondant aux opérations $l_i + al_j$, $l_+ bl_k$ respectivement. Alors $B = PA, C = QB, B' = QA, C' = PB'$. Donc $C = QPA$ et $C' = PQA$. Comme $C = C'$, et qu'on peut choisir $A = I$, on obtient $QP = PQ$.

Exercice 4.4 (i) On a $u = 3v - w + x$, donc $3v = u + w - x$ et enfin $v = \frac{1}{3}u + \frac{1}{3}w - \frac{1}{3}x$. (ii) On a $au = -bv - cw$, et comme $a \neq 0$, on peut multiplier les deux côtés par le scalaire $\frac{1}{a}$ et on obtient $u = -\frac{b}{a}v - \frac{c}{a}w$. Si u était nul, la preuve ci-dessus ne marcherait pas, car on ne pourrait pas multiplier par ce scalaire. Plus précisément voici un contre-exemple : $u = (1, 0, 0)$, $v = (0, 1, 1)$, $w = (0, -1, -1)$; on a $au + bv + cw = 0$, avec $a = 0, b = 1, c = 1$ mais u n'est pas combinaison linéaire de v et w (prouvez-le). (iii) $u = 3v - w = 3(x + y) - (y - z)) = 3x + 3y - y + z = 3x + 2y + z$. (iv) On a $u = av + bw$, $v = cx + dy$, $w = ex + fy$ (où a, b, c, d, e, f sont des scalaires), donc $u = a(cx + dy) + b(ex + fy) = acx + ady + bex + bfy = (ac + be)x + (ad + bf)y$.

Exercice 4.5 On peut écrire $x = ay + bz$ pour des scalaires a et b. Alors a et b ne sont pas simultanément nuls, car sinon $x = 0$. Si $a \neq 0$, on obtient $y = (1/a)x - (b/a)z$ et y est combinaison linéaire de x, z. Si $b \neq 0$, on obtient de manière analogue que z est combinaion linéaire de x, y.

Exercice 4.6 On vérifie que la fonction satisfait aux deux conditions de la définition 4.3.

Exercice 4.7 Si la condition est réalisée, le polynôme est a_x et on vérifie qu'il défimit une apllication linéaire. Réciproquement, si l'application est linéaire, alors pour tous $a, \alpha \in \mathbb{R}$, on doit avoir $P(\alpha a) = \alpha P(a)$; c'est-à-dire $\sum_i a_i(\alpha a)^i = \alpha \sum_i a_i a^i$, ce qui se réécrit en $\sum_i a_i \alpha^i a^i = \sum_i a_i \alpha a^i$. Les a_i sont constants, et α, a prennent des valeurs quelconques ; on peut donc considérer cette égalité comme un égalité de deux polynômes en deux variables α et a ; donc elle doit être vraie coefficient par coefficient, et on en déduit que les a_i sont tous nuls, sauf peut-être a_1.

Exercice 5.3 Montrer que cet ensemble est un sous-espace de l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 5.5 Non, car la matrice nulle n'y est pas.

Exercice 5.6 Non, car la matrice nulle n'y est pas. Non, car on peut trouver des matrices de déterminants nuls dont la somme n'est pas de déterminant nul.

Exercice 5.10 On considère une famille $(E_i)_{i \in I}$ de sous-espaces d'un espace vectoriel V. Soit $E = \bigcup_{i \in I} E_i$. Comme $0 \in E_i$ pour tout $i \in I$, on a $0 \in E$. Soit $x, y \in E$; alors $x, y \in E_i$ pour tout i ; donc $x + y \in E_i$ pour tout i ; donc $x + y \in E$. Etc…

Exercice 5.13 Toute matrice M, carrée d'ordre n, s'écrit $\frac{1}{2}(M + M^t) + \frac{1}{2}(M - M^t)$, et la première matrice est symétrique, alors que la seconde est antisymétrique. Il reste à vérifier qu'une matrice qui est à la fois symétrique et antisymétrique est nulle.

Exercice 5.14 C'est analogue à l'exercice précédent, en utilisant la formule $f(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) + \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$.

Exercice 6.3 Ecrivons une relation de dépendance linéaire pour $x_1, \dots, x_{n-1}, x_n + a_1x_1 + \dots + a_{n-1}x_{n-1}$: $b_1x_1 + \dots + b_{n-1}x_{n-1} + b_n(x_n + a_1x_1 + \dots + a_{n-1}x_{n-1}) = 0$. Ceci implique $b_1x_1 + \dots + b_{n-1}x_{n-1} + b_nx_n + b_na_1x_1 + \dots + b_na_{n-1}x_{n-1} = 0$, d'où l'on tire $(b_1 + b_na_1)x_1 + \dots + (b_{n-1} + b_na_{n-1})x_{n-1} + b_nx_n = 0$. Comme les x_i sont linéairement indépendants, on en déduit que $b_1 + b_na_1 = 0, \dots, b_{n-1} + b_na_{n-1}, b_n = 0$. Ceci implique que tous les b_i sont nuls.

Exercice 6.4 On a $(a_1, \dots, a_n) = a_1(1, -1, 0, \dots, 0) + (a_1 + a_2)(0, 1, -1, 0, \dots, 0) + \dots + (a_1 + \dots + a_{n-1})(0, \dots, 1, -1)$.

Exercice 6.9 Définissons E_{ij}, matrice carrée d'ordre n, par : son coefficient i, j est 1, et les autres sont nuls. Alors l'espace des matrices carrées triangulaires supérieures d'ordre n a pour base les matrices E_{ij} avec $1 \leq i \leq j \leq n$. Sa dimension est donc $n + (n-1) + \dots + 2 + 1 = \frac{n(n+1)}{2}$.

Exercice 6.10 Soit $f_1, \dots, f_p$ une base de F et $g_1, \dots, g_q$ une base de G.

Supposons que F, G soient des sous-espaces supplémentaires dans E. Alors tout vecteur e de E est une somme $f + g$; comme f est une combinaison linéaire des f_i et g une combinaison linéaire des g_j, e est une combinaison linéaire de $f_1, \ldots, f_p, g_1, \ldots, g_q$. Donc ces $p+q$ vecteurs engendrent E. Ils sont aussi linéairement indépendants : en effet, si $\sum_i a_i f_i + \sum_j b_j g_j = 0$, alors $\sum_i a_i f_i = \sum_j (-b_j) g_j$; le membre gauche est dans F et le membre droit dans G ; donc ils sont nuls tous deux ; comme les f_i sont linéairement indépendants, de même que les g_j, on déduit que tous les coefficients a_i et b_j sont nuls. Conclusion : $f_1, \ldots, f_p, g_1, \ldots, g_q$ est une base de E.

Réciproquement, ...

Exercice 6.11 Tout polynôme s'écrit de manière unique comme une somme $P+Q$, où P (resp. Q) est une combinaison linéaire de monômes x^n avec n multiple de 3 (resp. avec n pas multiple de 3).

Exercice 6.12 La dimension de G est 2, d'après l'exercice 6.10. Montrons que $u+f', v+f'$ sont linéairement indépendants : si $a(u+f')+b(v+f')=0$, alors $au+bv=-(a+b)f'$; le membre gauche est dans G et le droit dans F ; comme ces espaces sont supplémentaires, les deux membres doivent être nuls, et il s'ensuit que $a=b=0$, car u, v sont linéairement indépendants. Conclusion : $u+f', v+f'$ forment une base de G', qui est donc de dimension 2.

Soit $e \in E$. Alors $e=f+g$, $f \in F, g \in G$; de plus, $g=au+bv$, donc $e=(f-af'-bf')+(a(u+f')+b(v+f'))$. Le premier terme est dans F est le second dans G' ; donc $E=F+G'$. Soit maintenant un $e \in F \cap G'$; alors $e=f=a(u+f')+b(v+f')$; donc $f-af'-bf'=au+bv$; le membre gauche est dans F et celui de droite dans G ; donc ils sont nuls et l'on en tire que $a=b=0$ et enfin $e=0$. Conclusion : F et G sont supplémentaires dans E.

Exercice 6.13 La suite nulle est dans F. Si (a_n) et (b_n) sont dans F, alors leurs somme (a_n+b_n) aussi, car $a_{n+1}+b_{n+1}=aa_n+ab_n=a(a_n+b_n)$. De même, $\lambda(a_n)=(\lambda a_n)$ est dans F, car $\lambda a_{n+1}=\lambda a a_n=a(\lambda a_n)$.

Supposons $(a_n) \in F$. On $a_0=a^0 a_0$. Supposons que $a_n=a^n a_0$; alors $a_{n+1}=aa_n=aa^n a_0=a^{n+1}a_0$.

L'espace F est de dimension1 : il a pour base la suite (a^n).

Exercice 6.14 Une base de ce sous-espace est formée par les deux suites (u_n) et (v_n), satisfaisant la récurrence considérée, et les conditions initiales : $u_0=1, u_1=0$, $v_0=0, v_1=1$.

Supposons que la suite $(1, r, r^2, r^3, \ldots)$ soit dans G ; en appliquant la récurrence, on trouve $r^2=ar+b$.

Exercice 7.11 Soit u cette fonction. On a $u(x,y)=x+y$. Elle est surjective car tout vecteur dans E est somme d'un vecteur dans F et d'un vecteur dans G. Si $(x,y) \in \mathrm{Ker}(u)$, alors $x+y=0$; comme $0+0=0$ et que les espaces sont supplmentaires, on doit avoir, par unicité, $x=0=y$. Donc u

est injective.

Exercice 7.12 Supposons que f envoie toute famille de vecteurs linéairement indépendants sur une famille de vecteurs linéairement indépendants. Si $e \in \mathrm{Ker}(f)$, alors e doit être nul, sinon e est non nul, il est linéairement indépendant, mais son image n'est pas linéairement indépendant. Conclusion : f est injectif.

Supposons que f envoie toute famille génératrice sur une famille génératrice. Si $v \in F$, nous pouvons écrire $v = \sum a_i f(e_i)$, où $e_1, \ldots, e_n$ engendrent E. Donc $v = f(\sum a_i e_i)$ et f est surjective.

Exercice 8.2 Si les deux vecteurs sont nuls, les trois déterminants sont sûrement nuls. Supposons que v est un multiple scalaire de v' ; alors dans chacune de ces trois matrices, la première ligne est un multiple scalaire de la deuxième ; son déterminant est donc nul. Conclusion : si v, v' sont linéairement dépendants, alors les trois déterminants sont nuls

Réciproquement, supposons que ces trois déterminants soient nuls. Si $v = v' = 0$, il n'y a rien à démontrer. Supposons que v' soit non nul, et sans restreindre la généralité, que $a' \neq 0$; on peut même supposer que $a' = 1$. Alors $b = ab', c = ac'$, donc $v = a(1, b', c') = av'$ et les deux vecteurs sont linéairement indépendants.

Exercice 8.3 L'inverse de $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ est $\begin{bmatrix} d/D & -b/D \\ -c/D & a/D \end{bmatrix}$ où $D = ad - bc$.

Exercice 9.1 Si $f(v) = \lambda(v)$, alors $f^{-1}(v) = \lambda^{-1}(v)$.

Exercice 10.3 Posons $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij}$, $C = AB^t = (c_{ik})$; cette dernière matrice est de taille $n \times n$. Alors $c_{ik} = \sum_{1 \leq j \leq p} a_{ij} b_{kj}$ et par suite $\mathrm{Tr}(AB^t) = \sum_{1 \leq i \leq n} c_{ii} = \sum_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p} a_{ij} b_{ij}$. Cet exercice se traite donc de manière analogue à l'exemple 10.1.

Exercice 8.3 L'inverse de $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ est $\begin{bmatrix} d/D & -b/D \\ -c/D & a/D \end{bmatrix}$ où $D = ad - bc$.

Références

[1] [CP] G. Charron, P. Parent, Mathématique 105 Algèbre linéaire et vectorielle : géométrie. 2

[2] [L] P. Leroux, Algèbre linéaire, une approche matricielle, Modulo, 1978.

[3] [LM] F. Liret, D. Martinais, Algèbre 1ère année, Dunod, 2003.

Index