Feuille d'exercices 1

Rappel

Dans le cours on a vu la définition suivante d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Un $\mathbb{K}$-*espace vectoriel* est la donnée :

- d'un ensemble E,
- d'une application $E \times E \to E : (x, y) \mapsto x + y$ appelée *addition*,
- d'une application $\mathbb{K} \times E \to E : (\lambda, y) \mapsto \lambda y$ appelée *produit externe*,

qui satisfont aux huits axiomes suivants :

(E1) $x + y = y + x$ pour tous $x, y \in E$; (commutativité de l'addition)

(E2) $(x + y) + z = x + (y + z)$ pour tous $x, y, z \in E$; (associativité de l'addition)

(E3) il existe un élément 0_E de E tel que $x + 0_E = x = 0_E + x$ pour tout $x \in E$; (existence de l'élément neutre)

(E4) pour tout $x \in E$, il existe un élément $x' \in E$ tel que $x + x' = 0_E = x' + x$; (existence de l'opposé)

(E5) $1x = x$ pour tout $x \in E$; (action de l'unité de $\mathbb{K}$)

(E6) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ et pour tout $x \in E$; (distributivité)

(E7) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$ et pour tous $x, y \in E$; (distributivité)

(E8) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ et pour tout $x \in E$. (associativité mixte)

Puis, on a montré les conséquences suivantes.

(C1) L'élément neutre de E est unique ; c'est-à-dire, il existe un et un seul élément 0_E de E vérifiant $x + 0_E = x = 0_E + x$ pour tout $x \in E$.

(C2) L'opposé de tout élément de E est unique ; c'est-à-dire, pour tout $x \in E$, il existe un et un seul élément x' de E vérifiant $x + x' = 0_E = x' + x$.
Notation : l'opposé de x est noté $-x$.

(C3) On a $0_{\mathbb{K}}x = 0_E$ pour tout $x \in E$.

(C4) $(-1)x = -x$ pour tout $x \in E$.

Espaces vectoriels

Exercice 1. Identifier les ensembles qui sont des espaces vectoriels sur le corps $\mathbb{Q}$:

a. l'ensemble des réels positifs $\mathbb{R}^+$

b. l'ensemble des nombres entiers $\mathbb{Z}$

c. l'ensemble des rationnels $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ tels que $\mathrm{pgcd}(p, q) = 1$ et $q \leq 17$

d. $\{p \in \mathbb{R}[x] : \deg(p) \leq 17\}$

e. $\{f : \mathbb{C} \to \mathbb{N}\}$

f. $\{f : \mathbb{C} \to \mathbb{Q}\}$

g. $\{f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}\}$

h. $\{f : \mathbb{C} \to \mathbb{R} : f(1) = 0\}$

i. $\{f : \mathbb{C} \to \mathbb{R} : f(0) = 1\}$

Exercice 2. Montrer les énoncés suivants en utilisant (E1)–(E8) et (C1)–(C4) ; justifier chaque étape, égalité, affirmation, etc., de la démonstration.

(C5) $\alpha 0_E = 0_E$ pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$.

(C6) Si $\alpha \in \mathbb{K}$ et $x \in E$ sont tels que $\alpha x = 0_E$, alors soit $\alpha = 0_{\mathbb{K}}$ soit $x = 0_E$.

Sous-espaces vectoriels

Exercice 3. Identifier si l'ensemble F est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel E.

a. $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + \pi = 0 \text{ et } x + 3\pi z = 0\}$

b. $E = \mathbb{R}^2$ et $F = \{(x, y) \in E : x^2 = y\}$

c. $E = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ et $F = \{f \in E : f(-2) = 0\}$

d. $E = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ et $F = \{f \in E : f \text{ est dérivable}\}$

e. $E = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ et $F = \{f \in E : f \text{ est intégrable}\}$

f. $E = \mathbb{R}[x]$ et $F = \{p \in E : \deg(p) = 3\}$

g. $E = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ et $F = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(-x) = f(x)\}$

h. $E = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ et $F = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(-x) = -f(x)\}$

Exercice 4. Donner une démonstration complète de l'énoncé suivant.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Si F et F' sont des sous-espaces de E, alors l'intersection $F \cap F'$ est un sous-espace de E.

N'oublier pas :

- d'écrire une introduction qui précise vos hypothèses et vos symboles ;
- d'expliquer ce que vous allez faire, et pourquoi il est suffisant ;
- d'écrire une conclusion résumant ce que vous avez fait ;
- de relire la démonstration pour vérifier que
  - le texte se lise facilement ;
  - toutes les variables et tous les symboles sont définis ;
  - les mathématiques sont correctes.

Indépendance linéaire

Exercice 5. En classe, nous nous sommes convaincus que l'ensemble de matrices de format $n \times m$ à coefficients dans $\mathbb{R}$, noté $\mathrm{Mat}_{n\times m}(\mathbb{R})$, est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Déterminer si les matrices suivantes sont linéairement indépendantes dans $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

a. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

d. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

e. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

f. $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$

Exercice 6. Considérons $\mathbb{R}$ comme espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$.

a. Est-ce que les éléments $1, \sqrt{2}, \sqrt{5}$ sont linéairement indépendants ?

b. Est-ce que les éléments $1, \sqrt{3}, \sqrt{12}$ sont linéairement indépendants ?

Exercice 7. Montrer que les polynômes suivants sont linéairement indépendants dans $\mathbb{R}[x]$:

$$x+4, \quad 4\,x^2+7\,x+1, \quad 3\,x^2+x.$$