Feuille d'exercices 10

Exercice 1. Triangulariser sur $\mathbb{R}$, si possible, la matrice suivante.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -16 \\ 1 & -3 & -12 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Exercice 2. Triangulariser sur $\mathbb{R}$, si possible, la matrice suivante.

$$A = \begin{bmatrix} 9 & -12 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

Exercice 3. Triangulariser sur $\mathbb{R}$, si possible, la matrice suivante.

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercice 4. On définit $L : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ par

$$L(a + bx + cx^2) = (2a + 2b) + (2a + b + c)x + (-7a + 2b - 3c)x^2$$

pour tout polynôme $a + bx + cx^2 \in \mathcal{P}_2$. Posons $\mathcal{C} = (1, x, x^2)$ la base canonique de $\mathcal{P}_2$.

a. Calculer le polynôme caractéristique de L.

b. Calculer le polynôme minimal de L.

c. Calculer les valeurs propres λ_1, λ_2, λ_3 de L.

d. Calculer un vecteur propre $f_i(x)$ de L pour chaque valeur propre λ_i.

e. Soit P la matrice dont les colonnes sont les vecteurs de coordonnées de $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ dans la base $\mathcal{C}$. Vérifier que $P^{-1}[L]_{\mathcal{C}}P = [L]_{\mathcal{B}}$, où $\mathcal{B} = (f_1(x), f_2(x), f_3(x))$.

Exercice 5. Soit L un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n, et $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ la liste des valeurs propres *distinctes* de L. Notons m_j la multiplicité de la valeur propre λ_j.

a. Montrer que

$$\det(L) = \lambda_1^{m_1} \lambda_2^{m_2} \cdots \lambda_r^{m_r} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{trace}(L) = m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 + \cdots + m_r\lambda_r.$$

b. En déduire que L est inversible ssi 0 n'est pas une valeur propre de L.

Exercice 6. Soit A une matrice symétrique à coefficients dans $\mathbb{R}$. Montrer que la somme des carrées des entrées de A coïncide avec la somme des carrées des valeurs propres de A.

Autrement dit, si les entrées de A sont notées a_{ij} avec $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, et si les valeurs propres de A sont notées $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, montrer que

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2.$$

(*Indice: Considérer la trace de la matrice $A^t A$*)

Exercice 7. Soit A une matrice dans $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ dont toutes les valeurs propres sont *nulles*.

a. Montrer que si A est symétrique, alors A est la matrice nulle.

b. Est-ce vrai si A n'est pas symétrique ?

Exercice 8. Calculer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 1 & 0 & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \end{bmatrix}.$$

(*Indice: ils sont du même degré*)