Feuille d'exercices 12

Exercice 1. Soit E un espace vectoriel euclidien dont le produit scalaire est noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Montrer que si $v_1, \ldots, v_m$ est une famille de vecteurs non nuls telle que $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ si $i \neq j$, alors $v_1, \ldots, v_m$ sont linéairement indépendants.

Exercice 2. Soit $\mathcal{P}_2$ l'espace euclidien des polynômes de degré au plus 2 de la variable x. On définit un produit scalaire sur $\mathcal{P}_2$ par

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\,dx$$

pour tous polynômes $p, q \in \mathcal{P}_2$. Appliquer l'algorithme de Gram–Schmidt à la base $(1, x, x^2)$ pour trouver une base orthonormale de $\mathcal{P}_2$.

Exercice 3. Soit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Trouver une matrice orthogonale U telle que $U^t A U$ soit une matrice diagonale.

Exercice 4. Soit L l'endomorphisme de $\mathcal{P}_2$ défini par

$$L(a + bx + cx^2) = (a - 2b + 2c) + (-2a + 4b - 4c)x + (2a - 4b + 4c)x^2.$$

Trouver une base de $\mathcal{P}_2$ dans laquelle la matrice de L est diagonale.

Exercice 5. Soit L un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont

$$\begin{array}{ll} \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} & \text{est un vecteur propre de } L \text{ pour la valeur propre } \quad 1, \\ \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} & \text{est un vecteur propre de } L \text{ pour la valeur propre } \quad \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} & \text{est un vecteur propre de } L \text{ pour la valeur propre } -\frac{1}{2}. \end{array}$$

Déterminer la matrice de L dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 6. Soit

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

a. Trouver une matrice orthogonale U telle que $U^t A U$ soit une matrice diagonale.

b. Soit u_1 et u_2 les colonnes de la matrice U. Vérifier que

$$8u_1u_1^t + 3u_2u_2^t = A$$

c. Posons $P_1 = u_1u_1^t$ et $P_2 = u_2u_2^t$. Vérifier que

$$P_1^2 = P_1, \qquad P_2^2 = P_2, \qquad P_1P_2 = 0, \qquad P_2P_1 = 0.$$

d. Déterminer la matrice de proj_{u_1} et proj_{u_2} dans la base canonique.

Exercice 7. Soit A une matrice réelle symétrique de taille n.

a. Montrer que si $\mathcal{B}$ est une base *orthonormale* de $\mathbb{R}^n$,
alors la matrice $[A]_{\mathcal{B}}$ de A dans la base $\mathcal{B}$ est aussi symétrique.

b. Donner un exemple d'une matrice réelle symétrique A est une base $\mathcal{B}$,
dont la matrice $[A]_{\mathcal{B}}$ n'est *pas* symétrique.

Exercice 8. Soit L un endomorphisme d'un espace euclidien qui possède une base dans laquelle la matrice de L est triangulaire supérieure. Expliquer pourquoi qu'il existe une base *orthonormale* de E dans laquelle la matrice de L est triangulaire supérieure.