Feuille d'exercices 2

Exercice 1. Trouver une base de $\mathbb{R}^4$ qui contient les vecteurs $(1,2,3,4)$ et $(4,3,2,1)$.

Exercice 2. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in \mathbb{K}$ des scalaires non nuls. Montrer que si $(b_1,\dots,b_n)$ est une base de E, alors $(\alpha_1 b_1,\dots,\alpha_n b_n)$ est une base de E.

Exercice 3. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace de E.

a. Montrer que $\dim(F) \leq \dim(E)$.

b. Montrer que si $\dim(F) = \dim(E)$, alors $F = E$.

c. Montrer que $\dim(E) = 0$ ssi E est l'espace vectoriel nul.

Exercice 4.

a. Montrer que $S_1 = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : 2a - 2b - c = 0\}$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^3$ et trouver une base de S_1.

b. Montrer que $S_2 = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : 2a + b - c = 0 \text{ et } 2a - 3b - c = 0\}$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^3$ et trouver une base de S_2.

c. Trouver une base de $S_1 + S_2$.

Exercice 5. Soit la matrice

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a. Montrer que l'ensemble

$$F = \{A \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R}) : AD = DA\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

b. Calculer une base et la dimension de F.

Exercice 6. Trouver une base du sous-espace de $\mathbb{R}[x]$ engendré par les polynômes

$$x^3 + x^2 + x + 1, \quad x^2 + 1, \quad x^3 - x^2 + x - 1, \quad x^2 - 1.$$

Exercice 7. Montrer que les ensembles suivants sont des bases de l'espace vectoriel de polynômes de degré au plus n et à coefficients réels.

a. $\{1, x, \dots, x^n\}$

b. $\{1, (x-1), \dots, (x-1)^n\}$

c. $\{x^{\underline{0}}, x^{\underline{1}}, x^{\underline{2}}, \dots, x^{\underline{n-1}}\}$, où $x^{\underline{m}} = x(x-1)(x-2)\cdots(x-(m-1))$ et $x^{\underline{0}} = 1$