Feuille d'exercices 3

Exercice 1. On définit $L : \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4$ par

$$L\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a+b \\ a+c \\ a+d \\ b+c \end{bmatrix}$$

a. Montrer que L est une application linéaire.

b. Calculer $\ker(L)$.

c. Déterminer si L est une application injective.

d. Déterminer si L est une application surjective.

Exercice 2. On définit $L : \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ par

$$L\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} a+d & 0 \\ 0 & a+d \end{bmatrix}$$

a. Montrer que L est une application linéaire.

b. Montrer que $L \circ L = L$.

c. Montrer que $(\mathrm{Id}_E - L) \circ (\mathrm{Id}_E - L) = \mathrm{Id}_E - L$.

d. Calculer $\ker(L)$.

e. Calculer $\mathrm{im}(L)$.

f. Montrer que $\ker(L) \oplus \mathrm{im}(L) = \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Exercice 3. Soit $L : E \to E'$ une application linéaire entre des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.

a. Montrer que si $L(v_1), L(v_2), \ldots, L(v_n)$ sont linéairement indépendants, alors $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sont linéairement indépendants.

b. La réciproque de la partie précédente n'est pas vraie. Expliquer.

c. Montrer que si $v_1, v_2, \ldots, v_n \in E$ engendrent E, alors $L(v_1), L(v_2), \ldots, L(v_n)$ engendrent l'image de L.

d. Est-ce que le sous-espace engendré par $L(v_1), L(v_2), \ldots, L(v_n)$ coincident avec E' ?

Exercice 4. Soit $L : E \to E'$ une application linéaire entre des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.

a. Montrer que si F est un sous-espace de E, alors $\{L(v) : v \in F\}$ est un sous-espace de E' de dimension au plus $\dim(F)$.

b. Montrer que si F' est un sous-espace de E' qui est contenu dans l'image de L, alors $\{v \in E : L(v) \in F'\}$ est un sous-espace de E de dimension au moins $\dim(F')$.

c. Montrer que l'hypothèse « F' est contenu dans l'image de L » est nécessaire dans la partie précédente.

Exercice 5. *(Espace vectoriel produit)* Soit E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Dans cet exercice, on va munir le produit cartésien

$$E \times F = \Big\{(e, f) : e \in E \text{ et } f \in F\Big\}$$

d'une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

- On définit la ***somme*** de deux éléments (e, f) et (e', f') de $E \times F$ comme
$$(e, f) + (e', f') = (e + e', f + f').$$
- On définit la ***multiplication*** de $(e, f) \in E \times F$ par un scalaire α comme
$$\alpha(e, f) = (\alpha e, \alpha f).$$

a. Calculer la somme et la multiplication scalaire suivantes dans $\mathbb{R}^2 \times \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$:

$$\left(\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1 & \frac{2}{3}\\ -7 & 0\end{bmatrix}\right) + \left(\begin{bmatrix}-4\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & \frac{1}{5}\\ -1 & 3\end{bmatrix}\right) \qquad \text{et} \qquad 5\left(\begin{bmatrix}-4\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & \frac{1}{5}\\ -1 & 3\end{bmatrix}\right).$$

b. Convainquez-vous que $E \times F$ est un espace vectoriel.

c. Posons $E_0 = E \times \{0_F\}$ et $F_0 = \{0_E\} \times F$.
Montrer que E_0 et F_0 sont des sous-espaces supplémentaires de $E \times F$.

d. Montrer que si E et F sont de dimension finie, alors $\dim(E \times F) = \dim(E) + \dim(F)$.

e. Soit

$$E = \mathrm{vect}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\-2\end{bmatrix}\right\} \qquad \text{et} \qquad F = \mathrm{vect}\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right\}.$$

On définit une application $L : E \times F \to E + F$ par $L\big((e, f)\big) = e + f$.
Montrer que L est une application linéaire. Est-ce que L est un isomorphisme ?

f. Soit S_1 et S_2 deux sous-espaces supplémentaires d'un espace vectoriel. Montrer que l'application $L : S_1 \times S_2 \to S_1 \oplus S_2$ définie par $L\big((u, v)\big) = u + v$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Expliciter l'inverse de L.

Exercice 6. Déterminer si les applications suivantes sont linéaires.

a. $f_1 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2, x_3, x_4)$.

b. $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_2(x) = x + 1$.

c. $f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f_3(x_1, x_2, x_3) = (-x_3, x_1, x_2)$.

d. $f_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f_4(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_2)$.

e. $f_5 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}^3$ définie par $f_5(a, b) = (a + ib, a - ib, b)$.

f. La composition de f_4 et f_5.