Feuille d'exercices 4

Exercice 1. Soit F_1 et F_2 des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. Montrer que si $\dim(E) = 9$ et $\dim(F_1) = \dim(F_2) = 5$, alors $F_1 \cap F_2 \neq \{0\}$.

Exercice 2. Soit F_1, F_2, et F_3 des sous-espace d'un espace vectoriel E de dimension finie. Montrer que

$$\dim(F_1 + F_2 + F_3) \leq \dim(F_1) + \dim(F_2) + \dim(F_3).$$

Exercice 3. Soit

$$v_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a. Compléter v_1, v_2 pour former une base de $\mathbb{R}^4$.

b. En utilisant la partie précédente, trouver un supplémentaire de $\mathrm{vect}\{v_1, v_2\}$.

Exercice 4. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[x]$ défini par $F = \{ax^2 + bx^5 : a, b \in \mathbb{R}\}$. Trouver un sous-espace supplémentaire de F.

Exercice 5. Au Devoir 1, vous avez montrer que les deux sous-ensembles suivants de sont des sous-espaces supplémentaires de $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & -a-b \\ 0 & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\} \qquad \text{et} \qquad N = \left\{ \begin{pmatrix} c & 0 \\ d & -c \end{pmatrix} : c, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

a. Calculer la projection de la matrice $\left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{smallmatrix}\right)$ sur M parallèlement à N.

b. Calculer la symétrie de la matrice $\left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{smallmatrix}\right)$ par rapport à M parallèlement à N.

Exercice 6. Soit $L : E \to E'$ une application linéaire entre $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies. Montrer qu'il existe un sous-espace X de E tel que

$$X \cap \ker(L) = \{0\} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{im}(L) = \{L(x) : x \in X\}.$$

(*Indice: Considérer un sous-espace supplémentaire.*)

Exercice 7. Soit E et E' des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

a. Montrer que si $L : E \to E'$ est une application linéaire injective,
et si $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sont des éléments linéairement indépendants dans E,
alors $L(v_1), \ldots, L(v_n)$ sont des éléments linéairement indépendants dans E'.

b. Montrer que si $L : E \to E'$ est une application linéaire surjective,
et si $u_1, u_2, \ldots, u_m$ sont des éléments dans E qui engendrent E,
alors $L(u_1), \ldots, L(u_m)$ sont des éléments des E' qui engendrent E'.

c. Montrer que si $L : E \to E'$ est une application linéaire bijective, et si $(b_1, b_2, \ldots, b_d)$ est une base de E, alors $(L(b_1), L(b_2), \ldots, L(b_d))$ est une base de E'.