Feuille d'exercices 5

Exercice 1. Soit $\mathbb{R}_{\leq d}[x]$ l'espace vectoriel des polynômes en x à coefficients dans $\mathbb{R}$ et de degré au plus d.

a. On a vu que l'application qui associe à tout polynôme $p(x)$ sa dérivée $p'(x)$ est une application linéaire de $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ dans $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$. Calculer sa matrice dans les bases

$$\mathcal{B}_3 = \{1, x, x^2, x^3\} \text{ de } \mathbb{R}_{\leq 3}[x] \quad \text{et} \quad \mathcal{B}_2 = \{1, x, x^2\} \text{ de } \mathbb{R}_{\leq 2}[x].$$

b. L'application qui associe à tout polynôme $p(x)$ son intégrale $\int p(x)\,dx$ est une application linéaire de $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ dans $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$. Calculer sa matrice dans les bases

$$\mathcal{B}_2 = \{1, x, x^2\} \text{ de } \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \quad \text{et} \quad \mathcal{B}_3 = \{1, x, x^2, x^3\} \text{ de } \mathbb{R}_{\leq 3}[x].$$

c. Notons par D et I les matrices calculées dans les parties a et b, respectivement. Calculer le produit DI, et donner une interprétation du produit en utilisant des notions de calcul.

Exercice 2. Soit L l'application linéaire de $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ définie par

$$L(M) = M^T,$$

où M^T est la transposée de la matrice M.

a. Calculer la matrice de L dans la base

$$\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right).$$

(on utilise la même base pour l'espace vectoriel de départ et l'espace vectoriel d'arrivé).

b. Calculer la matrice de L dans la base

$$\mathcal{B}' = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right).$$

(on utilise la même base pour l'espace vectoriel de départ et l'espace vectoriel d'arrivé).

Exercice 3. Soit $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par

$$L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 5x \\ x + 3y \\ x - y \end{bmatrix}.$$

Calculer la matrice de L dans les bases

$$\mathcal{B}_1 = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right) \quad \text{et} \quad \mathcal{B}_2 = \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -\frac{3}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$