Feuille d'exercices 6

Exercice 1. Soit E un espace vectoriel de (b_1, b_2, b_3) une base de E et L l'application linéaire de E dans E dont la matrice dans cette base $\mathcal{B}$ est

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

a. Écrire la matrice de L dans la base $\mathcal{A} = (b_3, b_2, b_1)$.

b. Écrire la matrice de L dans la base $\mathcal{B} = (b_2, b_1, b_3)$.

c. Écrire la matrice de L dans la base $\mathcal{C} = (b_2, b_3, b_1)$.

d. Écrire la matrice de L dans la base $\mathcal{D} = (b_1 + b_3, b_2, b_2 - b_3)$.

Exercice 2. Soit la matrice dans $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

On définit $L : \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ par $L(M) = AM - MA$ pour toute $M \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

a. Montrer que L est une application linéaire.

b. Montrer que les matrices suivantes forment une base de $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

$$E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

c. Écrire la matrice de L dans la base $\mathcal{E} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$.

Exercice 3. Soit la matrice dans $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \text{ avec } b \neq 0.$$

On définit $L : \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ par $L(M) = AM - MA$ pour toute $M \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

a. Écrire la matrice de L dans la base $\mathcal{E} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ de $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

b. Calculer la matrice de passage de $\mathcal{E}$ à la base

$$\mathcal{B} = (E_{11} + E_{22}, E_{12} - E_{21}, E_{11} - E_{22}, E_{12} + E_{21}).$$

c. Calculer la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{E}$.

d. Écrire la matrice de L dans la base $\mathcal{B}$.

e. Déterminer si $\ker(L)$ et $\mathrm{im}(L)$ sont des sous-espaces supplémentaires de $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Exercice 4. *(Matrice d'une projection)* Soit $P : E \to E$ une application linéaire telle que $P \circ P = P$, avec E un espace vectoriel de dimension finie.

a. Montrer que $\ker(P)$ et $\operatorname{im}(P)$ sont des sous-espaces supplémentaires de E.

(*Indice:* $e = (e - P(e)) + P(e)$)

b. Montrer qu'il existe une base $(b_1, \ldots, b_n)$ de E vérifiant

$$\begin{array}{cccc} P(b_1) = b_1, & P(b_2) = b_2, & \ldots, & P(b_r) = b_r, \\ P(b_{r+1}) = 0, & P(b_{r+2}) = 0, & \ldots, & P(b_n) = 0, \end{array}$$

où $r = \dim(\operatorname{im}(P))$.

c. Écrire la matrice de P dans la base $(b_1, \ldots, b_n)$.

d. Soit

$$P = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Montrer que $P^2 = P$ et trouver une base vérifiant la propriété énoncée à la partie *(b)*. Écrire la matrice de P dans cette base.

Exercice 5. *(Matrice d'une symétrie)* Soit $S : E \to E$ une application linéaire telle que $S \circ S = \mathrm{Id}_E$.

a. Montrer qu'il existe une base $(b_1, \ldots, b_n)$ de E et un entier $r \in \{1, \ldots, n\}$ vérifiant

$$\begin{array}{cccc} S(b_1) = b_1, & S(b_2) = b_2, & \ldots, & S(b_r) = b_r, \\ S(b_{r+1}) = -b_{r+1}, & S(b_{r+2}) = -b_{r+2}, & \ldots, & S(b_n) = -b_n. \end{array}$$

b. Écrire la matrice de S dans la base $(b_1, \ldots, b_n)$.

c. Soit

$$S = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Montrer que $S^2 = I_3$ et trouver une base vérifiant la propriété énoncée à la partie *(a)*. Écrire la matrice de S dans cette base.

Exercice 6. Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Montrer que $(f_1, \ldots, f_n, g_1, \ldots, g_m)$ est une base de E ssi $F = \operatorname{vect}(f_1, \ldots, f_n)$ et $G = \operatorname{vect}(g_1, \ldots, g_n)$ sont des sous-espaces supplémentaires de E.