Feuille d'exercices 7

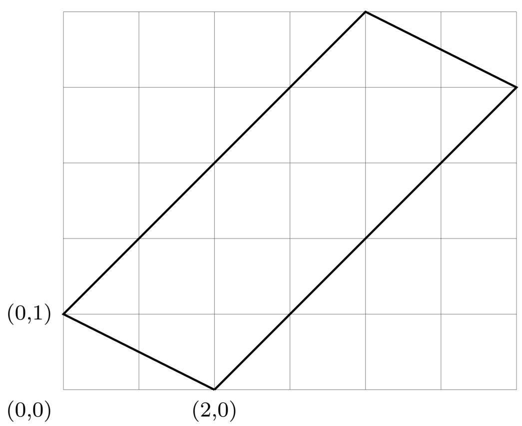
Exercice 1. Déterminer le déterminant de la matrice suivante.

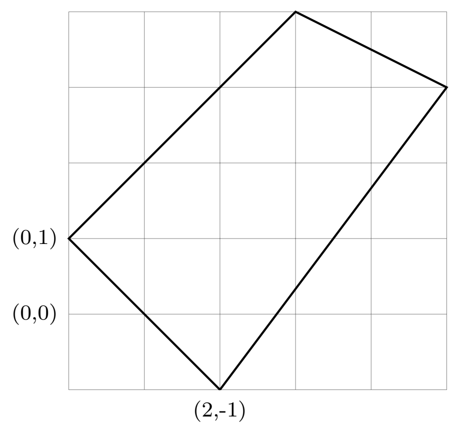
$$\begin{bmatrix} 0 & 1+i & 1+2i \\ 1-i & 0 & 2-3i \\ 1-2i & 2+3i & 0 \end{bmatrix}$$

Exercice 2. Déterminer le déterminant de la matrice suivante.

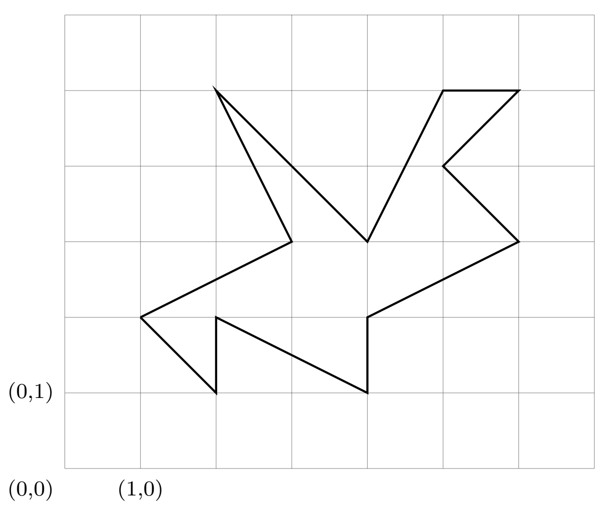
$$\begin{bmatrix} n^2 & (n+1)^2 & (n+2)^2 \\ (n+1)^2 & (n+2)^2 & (n+3)^2 \\ (n+2)^2 & (n+3)^2 & (n+4)^2 \end{bmatrix}$$

Exercice 3. Déterminer l'aire des polygones suivants.





Exercice 4. Déterminer l'aire de la forme suivante.



Exercice 5. Le *parallélogramme défini par les vecteurs* $\left[\begin{smallmatrix} x_1 \\ y_1 \end{smallmatrix}\right]$ *et* $\left[\begin{smallmatrix} x_2 \\ y_2 \end{smallmatrix}\right]$ est le polygone à sommets

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix}.$$

a. Calculer l'aire du parallélogramme défini par $\left[\begin{smallmatrix} -2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right]$ et $\left[\begin{smallmatrix} -2 \\ 5 \end{smallmatrix}\right]$.

b. Soit $A = \left[\begin{smallmatrix} 6 & -2 \\ -3 & 2 \end{smallmatrix}\right]$. Calculer l'aire du parallélogramme défini par $A\left[\begin{smallmatrix} -2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right]$ et $A\left[\begin{smallmatrix} -2 \\ 5 \end{smallmatrix}\right]$.

c. Notons par P l'ensemble des points à l'intérieur du parallélogramme défini par $\left[\begin{smallmatrix} x_1 \\ y_1 \end{smallmatrix}\right]$ et $\left[\begin{smallmatrix} x_2 \\ y_2 \end{smallmatrix}\right]$. Montrer que

$$P = \left\{ c_1 \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} : 0 \leq c_1 \leq 1, 0 \leq c_2 \leq 1 \right\}.$$

d. Soit $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une application linéaire et P un parallélogramme de $\mathbb{R}^2$. Montrer que $L(P)$ est un parallélogramme et que

$$\text{aire}(L(P)) = |\det(L)|\, \text{aire}(P).$$

Exercice 6. Soit (x_1, y_1) et (x_2, y_2) deux points du plan $\mathbb{R}^2$ avec $x_1 \neq x_2$.

a. Montrer qu'un point (x_3, y_3) appartient à la droite passant par (x_1, y_1) et (x_2, y_2) ssi

$$\det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix} = 0.$$

b. En déduire que la formule de la droite passant par (x_1, y_1) et (x_2, y_2) est

$$\det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x & y & 1 \end{bmatrix} = 0.$$

Exercice 7. On considère la suite de matrices :

$$[1] \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ r & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ r & 1 & 1 \\ r & r & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ r & 1 & 1 & 1 \\ r & r & 1 & 1 \\ r & r & r & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ r & 1 & 1 & 1 & 1 \\ r & r & 1 & 1 & 1 \\ r & r & r & 1 & 1 \\ r & r & r & r & 1 \end{bmatrix} \quad \cdots$$

a. Déterminer le déterminant des premières matrices de la suite.

b. Formuler une conjecture pour le déterminant d'une matrice de la suite.

c. Peux-tu démontrer ta conjecture ?