Feuille d'exercices 8

Exercice 1. Soit $\mathcal{P}_2$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de la variable x de degré au plus 2.

a. Déterminer la matrice de passage de la base

$$\mathcal{B} = (1 - 2x + x^2, 3 - 5x + 4x^2, 2x + 3x^2)$$

à la base $\mathcal{C} = (1, x, x^2)$, et la matrice de passage de la base $\mathcal{C}$ à la base $\mathcal{B}$.

b. Utiliser les matrices de passage de la partie (a) pour calculer les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ du polynôme $-1 + 2x + x^2$.

c. Utiliser les matrices de passage de la partie (a) pour déterminer une expression de $3x^2 - 9x + 1$ comme combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{B}$.

Exercice 2. Déterminer si l'application $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ est multilinéaire, où

a. $f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}\right) = (x_1 - 2x_2)(z_2 - z_3)$

b. $f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}\right) = x_1y_3 + y_2z_1 + z_3x_2$

c. $f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}\right) = x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2$

Exercice 3. Trouver un polynôme de degré au plus 3 passant par les points

$$(-2, -1), \quad (-1, 5), \quad (0, 3), \quad (1, -1).$$

Exercice 4. Existe-t-il un polynôme de degré au plus 2 passant par les points

$$(-3, 90), \quad (-2, 41), \quad (-1, 10), \quad (1, 2), \quad (2, 25), \quad (3, 65) \ ?$$

Exercice 5. Soit $z_1, z_2, \ldots, z_n$ des nombres complexes.

a. Montrer que

$$\det \begin{bmatrix} z_1 & z_2 & \cdots & z_n \\ z_1^2 & z_2^2 & \cdots & z_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_1^n & z_2^n & \cdots & z_n^n \end{bmatrix} = z_1 z_2 \ldots z_n \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ z_1 & z_2 & \cdots & z_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_1^{n-1} & z_2^{n-1} & \cdots & z_n^{n-1} \end{bmatrix}.$$

b. En déduire que

$$\begin{bmatrix} z_1 & z_2 & \cdots & z_n \\ z_1^2 & z_2^2 & \cdots & z_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_1^n & z_2^n & \cdots & z_n^n \end{bmatrix} \text{ est inversible ssi } z_1, \ldots, z_n \text{ sont non nuls est distincts.}$$

c. Montrer que si $z_1^k + z_2^k + \cdots + z_n^k = 0$ pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, alors $z_1 = \cdots = z_n = 0$.

Exercice 6 (problème défi).

a. Montrer que si $A \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ est une matrice vérifiant $\det(A+M) = \det(M)$ pour n'importe quelle matrice $M \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, alors $A = 0$.

b. Est-ce vrai pour les matrices 3×3 ? 4×4 ? $n \times n$?