Feuille d'exercices 9

Exercice 1. Soit un polynôme unitaire de degré n qui possède n racines distinctes

$$p(x) = x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0 = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdots(x-\lambda_n).$$

Montrer que

$$V(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -c_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -c_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -c_{n-1} \end{bmatrix} V(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix},$$

où $V(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ est la matrice de Vandermonde associée à $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$:

$$V(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}.$$

Par exemple, pour

$$p(x) = x^3 - 7x - 6 = (x-3)(x+2)(x+1)$$

on a que

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Exercice 2. Posons

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix}.$$

a. Déterminer le polynôme caractéristique de A.

b. Déterminer le polynôme minimal de A.

c. Déterminer les valeurs propres de A et une base de chaque espace propre de A.

d. En déduire que A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

e. Exprimer l'inverse de la matrice A comme combinaison linéaire de $I_3, A, A^2, A^3, \ldots$

f. Montrer que A^n est de la forme $\alpha A + \beta I_3$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 3. Posons

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & -6 & -9 \\ -4 & -1 & 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

a. Déterminer le polynôme caractéristique de A.

b. Déterminer le polynôme minimal de A.

c. Déterminer les valeurs propres de A et une base de chaque espace propre de A.

d. Est-ce que A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$? triangularisable sur $\mathbb{R}$?

Exercice 4. Soit A une matrice dont la somme des coefficients dans chaque ligne est 1 :

$$a_{i1} + a_{i2} + \cdots + a_{in} = 1 \qquad \text{pour tout } 1 \leq i \leq n.$$

Montrer que 1 est une valeur propre de A.

Exercice 5. Soit A une matrice réelle 3×3 telle que

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad A^3 = A, \qquad A^2 \neq A.$$

a. Montrer que 0, 1 et -1 sont les valeurs propres de A. (*Indice: polynôme minimal*)

b. Déterminer trace(A), det(A), et trace(A^{2019}).

Exercice 6. Soit A une matrice réelle 3×3 telle que $A^3 = I_3$ et $A \neq I_3$.

a. Déterminer les valeurs propres de A. (*Indice: polynôme minimal*)

b. Déterminer si A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

c. Déterminer si A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

Exercice 7. Soit L un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie.

On dit qu'un sous-espace F de E est *stable par* L si pour tout $v \in F$ on a que $L(v) \in F$.

a. Montrer que si $\dim(E) = 3$, alors E possède un sous-espace stable par L de dimension 1 *et* un sous-espace stable par L de dimension 2.

b. Montrer que si $\dim(E) \geq 4$, alors E possède un sous-espace stable par L de dimension 1 *ou* 2.

(*Indice: Considérer les racines du polynôme caractéristique de L.*)

Exercice 8. Soit L et K deux endomorphismes d'un espace vectoriel E tels que $L \circ K = K \circ L$.

a. Montrer que si v est un vecteur propre de L, alors $K(v)$ est aussi un vecteur propre de L.

b. En déduire que tout espace propre de L est stable pour l'action de K.