Devoir 6

à remettre le *mercredi 16 octobre 2013*

Exercice 1.

Soient α et β les deux permutations suivantes.

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a. Calculer les sous-groupes $\langle\alpha\rangle$, $\langle\beta\rangle$, et $\langle\alpha,\beta\rangle$ de S_4.

b. Montrer que $\langle\alpha,\beta\rangle$ et $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times$ sont isomorphes.

c. Déterminer tous les homomorphismes de $\langle\alpha,\beta\rangle$ dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Pour chaque homomorphisme, déterminer son noyau et son image.

Exercice 2.

Soit G un groupe et $x \in G$. Montrer que :

a. Si $\operatorname{ordre}(x) = n$ est fini et si $k \in \mathbb{N}^*$, alors $\operatorname{ordre}(x^k) = n/\operatorname{pgcd}(n,k)$.

b. Si $f : G \to G'$ est un homomorphisme de groupes, alors $\operatorname{ordre}(f(x))$ divisie $\operatorname{ordre}(x)$.