Feuille d'exercices 10

Exercice 1. Soient G un groupe abélien et N un sous-groupe de G. Montrer que G/N est un groupe abélien.

Exercice 2. Soient G un groupe et H un sous-groupe de G d'indice 2. Montrer que $H \triangleleft G$ et que $G/H \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Exercice 3. Si H et N sont deux sous-groupes de G et $N \triangleleft G$, montrer que $H \cap N \triangleleft H$.

Exercice 4. Soit H un sous-groupe d'ordre n d'un groupe G. Montrer que si H est le seul sous-groupe de G d'ordre n, alors H est un sous-groupe normal de G.

Exercice 5. Soit H un sous-groupe normal de G. Montrer que si H est monogène, alors tout sous-groupe de H est un sous-groupe normal de G.

Exercice 6. Soient G un groupe et M et N deux sous-groupes normaux de G tel que $N \cap M = \{e\}$. Montrer que $n\,m = m\,n$ pour tout $m \in M$ et pour tout $n \in N$.

Exercice 7. Soient G un groupe abélien, n un entier non nul et

$$G^{(n)} = \{x^n : x \in G\} \qquad \text{et} \qquad G_{(n)} = \{z \in G : z^n = e\}\,.$$

Montrer que $G/G_{(n)} \cong G^{(n)}$.

Exercice 8. Soit

$$T = \{z \in \mathbb{C} : ||z|| = 1\}\,,$$

où $||z||$ est le module d'un nombre complexe z. Montrer que $\mathbb{C}^*/T \cong \mathbb{R}^*$.

Exercice 9. Soit H le sous-groupe de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ engendré par la matrice

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a. Soit $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Montrer que

$$AH = \{A, AJ, -A, -AJ\} \qquad \text{et} \qquad HA = \{A, JA, -A, -JA\}\,.$$

b. Soit $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Montrer que $AH = HA$ ssi $A = -A^t$.

Exercice 10. Soit K le sous-groupe de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ engendré par la matrice

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a. Montrer que

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

b. Soit $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Montrer que $AK = KA$ ssi $AV = AV$.

Exercice 11. Pour $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, on définit $\tau_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $\tau_{a,b}(x) = ax + b$.

a. Montrer que

$$G = \{\tau_{a,b} : a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0\},$$

muni de la composition d'applications, est un groupe.

b. Montrer que

$$N = \{\tau_{1,b} : b \in \mathbb{R}\}$$

est un sous-groupe normal de G.

c. Montrer que G/N est isomorphe à $\mathbb{R}^*$.

Exercice 12. Soit H un sous-groupe d'un groupe G. Le *normalisateur* de H dans G est

$$N_G(H) = \left\{ g \in G : gHg^{-1} = H \right\}.$$

a. Montrer que $N_G(H)$ est un sous-groupe de G qui contient H.

b. Montrer que H est un sous-groupe normal de $N_G(H)$.

c. Montrer que si K est un sous-groupe de G tel que H est un sous-groupe normal de K, alors $K \subseteq N_G(H)$. (Autrement dit, $N_G(H)$ est le plus grand sous-groupe normal de G qui contient H comme sous-groupe normal.)

d. En déduire que $H \lhd G$ ssi $N_G(H) = G$.