Feuille d'exercices 12

Exercice 1. Soit $\varphi : \mathbb{Z}/36\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ l'application $\varphi(n + 36\mathbb{Z}) = (n + 4\mathbb{Z}, n + 9\mathbb{Z})$. Montrer que φ est un isomorphisme de groupes et calculuer explicitement son inverse.

Exercice 2. Faire la liste à isomorphisme près de tous les groupe abéliens finis d'ordre 540.

Exercice 3. Soit $\mathbb{C}^*$ le groupe multiplicatif de nombres complexes, $\mathbb{R}^+$ le groupe multiplicatif de nombres réels positifs. et T le sous-groupe de $\mathbb{C}^*$ suivant :

$$T = \{z \in \mathbb{C} : ||z|| = 1\} \leq \mathbb{C}^*.$$

Montrer que $\mathbb{C}^*$ est le produit direct de T et $\mathbb{R}^+$.

Exercice 4. Soit $n \in \mathbb{N}$ impair. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est produit direct interne de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ et le sous-groupe $Z = \{\lambda I_n : \lambda \in \mathbb{R}^*\}$, où I_n est la matrice identité $n \times n$.

Exercice 5. Soient G un groupe abélien fini d'ordre n et m un entier positif qui divise n. Montrer que G possède un sous-groupe d'ordre m.

Exercice 6. Soient G un groupe abélien fini d'ordre mn, où m est n sont premiers entre eux. Montrer que G possède deux sous-groupes H et K tels que $|H| = m$, $|K| = n$ et $G = HK$.

Exercice 7. Montrer qu'un p-groupe abélien fini est engendré par ses éléments d'ordre maximal.

Exercice 8. Soient G un groupe abélien fini et H un sous-groupe de G. Montrer que G possède un sous-groupe isomorphe au groupe quotient G/H.

Exercice 9. Soit G un p-groupe monogène avec sous-groupes H et K. Montrer que soit $H \subseteq K$ ou $K \subseteq H$.

Exercice 10. Soient p un nombre premier et G un groupe tels que $g^p = e$ pour tout $g \in G$ (où e est l'élément neutre de G). Montrer qu'il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que

$$G \cong \underbrace{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}_{r \text{ copies}}.$$

Exercice 11. Soit G un groupe abélien.

a. Soit $T = \{g \in G : g \text{ est d'ordre fini}\}$. Montrer que T est un sous-groupe de G.

b. Montrer que le groupe quotient G/T ne possède pas d'éléments d'ordre fini.

c. Soit G un groupe abélien qui possède une partie génératrice finie. Montrer qu'il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que $G/T \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}$ (r copies).

d. Soit G un groupe abélien qui possède une partie génératrice finie. Montrer qu'il existe un entier $r \geq 0$ et des entiers $m_1, m_2, \ldots, m_t > 0$ tels que

$$G \cong \underbrace{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}}_{r \text{ copies}} \times \mathbb{Z}/m_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m_2\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/m_t\mathbb{Z}.$$