Feuille d'exercices 13

Exercice 1. Soit G un groupe abélien d'ordre $|G| = p^n m$, où p est un nombre premier qui ne divise pas m. Montrer que G possède un sous-groupe d'ordre p^n.

Exercice 2. Soit G un groupe agissant sur un ensemble E. Montrer que pour tout $x \in E$ et pour tout $g \in G$ on a

$$\mathrm{Stab}_G(g \cdot x) = g \,\mathrm{Stab}_G(x) g^{-1}.$$

Exercice 3. Soit G un groupe agissant sur un ensemble E. Montrer que pour tous $x, y \in E$, si $\mathrm{Orb}_G(x) = \mathrm{Orb}_G(y)$, alors $\mathrm{Stab}_G(x)$ et $\mathrm{Stab}_G(y)$ sont des sous-groupes conjugués.

Exercice 4. Soient G un groupe et H un sous-groupe de G. Soit $\mathcal{P}(G)$ l'ensemble des parties de G.

a. Montrer que l'application définie par

$$\begin{gathered} G \times \mathcal{P}(G) \longrightarrow \mathcal{P}(G) \\ g \cdot A = \{ga : a \in A\} \end{gathered}$$

est une action de G sur $\mathcal{P}(G)$.

b. Montrer que $\mathrm{Orb}_G(H) = G/H$.

c. Montrer que $\mathrm{Stab}_G(H) = H$.

d. En déduire que $|\,\mathrm{Orb}_G(H)| = [G : H]$.

Exercice 5. Soient G un groupe et H un sous-groupe de G. Soit $\mathcal{P}(G)$ l'ensemble des parties de G.

a. Montrer que l'application définie par

$$\begin{gathered} G \times \mathcal{P}(G) \longrightarrow \mathcal{P}(G) \\ g \cdot A = gAg^{-1} = \left\{gag^{-1} : a \in A\right\} \end{gathered}$$

est une action de G sur $\mathcal{P}(G)$.

b. Montrer que $\mathrm{Orb}_G(H) = \{gHg^{-1} : g \in G\}$.

c. Montrer que $\mathrm{Stab}_G(H) = \{g \in G : gHg^{-1} = H\}$.

d. Montrer que $H \triangleleft \mathrm{Stab}_G(H)$.

e. En déduire que $H \triangleleft G$ ssi $\mathrm{Stab}_G(H) = G$.

Exercice 6. Soient G' un groupe agissant sur un ensemble E, et $\varphi : G \to G'$ un homomorphisme de groupes. On définit une application

$$\begin{gathered} G \times E \to E \\ g \odot x = \varphi(g) \cdot x \end{gathered}$$

où $\cdot$ note l'action de G' sur E. Montrer que $\odot$ est une action de G sur E.

Exercice 7. Soient G un groupe agissant sur un ensemble E et H un sous-groupe normal de G tel que $h \cdot x = x$ pour tout $x \in E$. Montrer que

$$gH \odot x = g \cdot x$$

est une une action de G/H sur E.

Exercice 8. Soient G un groupe fini et H un sous-groupe de G.

a. Montrer que

$$\begin{gathered} G \times G/H \longrightarrow G/H \\ g \cdot (g'H) = (gg')H \end{gathered}$$

est une action de G sur G/H. *(Il faut montrer aussi que l'application est bien définie !)*

b. Pour $g \in G$ on définit

$$\begin{array}{rcl} t_g : G/H & \longrightarrow & G/H \\ g'H & \longmapsto & g \cdot (g'H) = (gg')H \end{array}$$

pour tout $gH \in G/H$. Montrer que t_g est une application bien définie et bijective.

c. Montrer que l'application $f : G \to S_{G/H}$ définie par $f(g) = t_g$ est un morphisme de groupes *(rappel : si E est un ensemble, alors S_E note le groupe de permutations de E).*

d. Montrer que le noyau de f est

$$\ker(f) = \bigcap_{g \in G} gHg^{-1}.$$

e. En déduire que $\ker(f) = H$ ssi H est un sous-groupe normal de G.