Feuille d'exercices 14

Exercice 1. Soit G un groupe. Montrer que la cardinalité de toute classe de conjugaison de G divise l'ordre de G.

Exercice 2. Soit H le sous-groupe de S_4 engendré par les transpositions $(1,2)$ et $(3,4)$. On fait H agir sur l'ensemble $\{1,2,3,4\}$. Déterminer les orbites et les stabilisateurs pour cette action.

Exercice 3. Soit G un groupe fini d'ordre 21 agissant sur un ensemble E.

a. Quels sont les cardinaux possibles des orbites pour cette action ?

b. Pour $i \in \mathbb{N}$, on note n_i le nombre d'orbites à i éléments. Montrer que

$$|E| = n_1 + 3n_3 + 7n_7 + 21n_{21}.$$

c. On suppose que $|E| = 11$. Montrer qu'il y a au moins un point fixe pour l'action de G sur E.

d. On suppose que $|E| = 19$ et qu'il n'y a pas de point fixe pour l'action de G sur E. Calculer le nombre d'orbites dans E sous l'action de G.

Exercice 4.

a. Calculer le nombre de 2-sous-groupes de Sylow du groupe symétrique S_4.

b. Calculer le nombre de 3-sous-groupes de Sylow du groupe symétrique S_4.

Exercice 5. Montrer que tout groupe d'ordre 40 possède un sous-groupe normal.

Exercice 6. Soient G un groupe fini non trivial dont l'élément neutre est noté e, p un nombre premier quelconque et

$$E = \{(g_1, g_2, \ldots, g_p) : g_1, g_2, \ldots, g_p \in G \text{ et } g_1 g_2 \cdots g_p = e\}.$$

a. Montrer que $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ agit sur E par

$$\bar{1} \bullet (g_1, g_2, g_3, \ldots, g_p) = (g_2, g_3, \ldots, g_p, g_1).$$

b. Montrer que l'ensemble de points fixes pour l'action de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sur E est

$$\{\underbrace{(g, g, \ldots, g)}_{p} : g \in G \text{ et } g^p = e\}.$$

c. Montrer que la cardinalité de E est $|G|^{p-1}$.

d. En déduire que

$$|G|^{p-1} \equiv |\{g \in G : g^p = e\}| \pmod{p}$$

Exercice 7. (Deuxième démonstration du théorème de Cauchy.) En déduire le théorème de Cauchy à partir de l'exercice 6(d) : Si G est un groupe fini non trivial et p est un nombre premier qui divise $|G|$, alors il existe un élément d'ordre p dans G.

Exercice 8. Déduire à partir de l'exercice 6(d) (avec $G = S_p$, le groupe symétrique) :

Théorème de Wilson : Si p est un nombre premier, alors $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$.

Exercice 9. Soit G un groupe fini non trivial dont l'élément neutre est noté e et tel que pour tous $a, b \in G$ différent de e, il existe un élément c de G tel que $b = c^{-1}ac$.

a. Montrer que si $a, b \in G$ sont tels que $a \neq e$ et $b \neq e$, alors a et b sont du même ordre.

b. En déduire que G est un p-groupe, où p est un nombre premier. (*Théorème de Cauchy*)

c. Montrer que G possède deux classes de conjugaison.

d. En déduire que G est un groupe d'ordre 2.