Feuille d'exercices 2

Exercices suivants dans les notes de cours :

- 7.1.10
- 7.1.11
- 7.1.12(a)

Exercice 1. Soit R le rectangle situé dans $\mathbb{R}^2$ à sommets $(2,1)$, $(2,-1)$, $(-2,-1)$ et $(-2,1)$. Soit E l'ensemble des symétries de R.

a. Dresser la table de $(E,\circ)$.

b. Montrer que $(E,\circ)$ est un groupe.

c. Dresser la table de $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z},+)$.

d. Comparer les deux tables.

Exercice 2. Montrer que l'ensemble

$$E=\left\{\begin{pmatrix}1 & x & y\\ 0 & 1 & z\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} : x,y,z\in\mathbb{C}\right\}$$

muni de la multiplication des matrices est un groupe.

Exercice 3. Soit $H=\{2^k : k\in\mathbb{Z}\}$. Montrer que $(H,\times)$ est un groupe.

Exercice 4. Soient X un ensemble, $f : X\to X$ une bijection et $G=\{f^k : k\in\mathbb{Z}\}$. Montrer que $(G,\circ)$ est un groupe.

Exercice 5. Soit E un ensemble muni d'une opération $*$. Pour un élément $a\in E$, on pose

$$C(a)=\{x\in E : a*x=x*a\}.$$

a. Montrer que si $(E,*)$ possède un élément neutre e, alors e appartient à $C(a)$.

b. Montrer que si $*$ est commutative dans $(E,*)$, alors $C(a)=E$ pour tout $a\in E$.

c. Montrer que si $*$ est associative dans $(E,*)$, alors $C(a)$ est stable pour $*$.

Exercice 6. Soit $(G,*)$ un groupe et a,b et c des éléments de G.

a. Montrer que la solution dans G de l'équation $a*x=b$ est unique (c'est-à-dire, montrer qu'il existe un et un seul élément x de G qui vérifie l'équation).

b. De même pour l'équation $x*a=b$.

c. De même pour l'équation $x*a*x*b*a=x*b*c$.

Remarque : Pour montrer l'existence d'une solution, il suffit d'en donner une.