Feuille d'exercices 3

Groupes et opérations

Exercice 1. Soit G un groupe.

a. Montrer qu'il y a qu'une seule possibilité pour la table de l'opération du groupe si G contient exactement 1, 2, ou 3 éléments.

b. Montrer qu'il y a 2 tables distinctes si G est un groupe a 4 éléments.

c. En déduire que si G contient 1, 2, 3 ou 4 éléments, alors G est abélien.

d. A titre de comparaison, montre que :
– il y a 2 possibilités distinctes pour la table d'un monoïde a 2 éléments.
– il y a 5 possibilités distinctes pour la table d'un semigroupe a 2 éléments.

Exercice 2. Soit G le produit cartesien d'ensembles $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $\mathbb{Z}$. On définit une opération sur G par

$$(a, m) * (b, n) = (ab, m + n)$$

où $a, b \in \mathbb{R}^*$ et $m, n \in \mathbb{N}$. Montrer que G muni de l'opération $*$ est un groupe.

Exercice 3. Soient E un ensemble et $*$ une opération sur E telle que $(a * b) * a = b$ pour tous $a, b \in E$. Montrer que $a * (b * a) = b$ pour tous $a, b \in E$.

Exercice 4. Soit $*$ une opération associative et commutative sur un ensemble E. Supposons que pour tous $x, y \in E$, il existe $z \in E$ tel que $x * z = y$. Montrer que $(E, *)$ est un groupe.

Règles de calcul

Exercice 5. Soient a et b deux éléments d'un groupe G. Montrer que $ab^n a^{-1} = (aba^{-1})^n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 6. Donner deux éléments a et b du groupe D_3 des isomètries du triangle tel que $(ab)^2 \neq a^2 b^2$.

Exercice 7. Soit G un groupe tel que $(xy)^2 = x^2 y^2$ pour tous $x, y \in G$. Montrer que G est abélien.

Exercice 8. Soit G un groupe tel que $g = g^{-1}$ pour tout $g \in G$. Montrer que G est abélien.

Exercice 9. Soit G un groupe qui contient un nombre pair d'éléments. Montrer qu'il existe un élément $g \in G$ tel que $g^2 = 1$ et $g \neq 1$.

Groupe d'éléments inversibles d'un monoïde

Exercice 10. Soient X un ensemble fini non vide et $\mathcal{F}(X)$ le monoïde d'applications de X vers X.

a. Montrer que la cardinalité de $\mathcal{F}(X)$ est n^n, où n est la cardinalité de X.

b. Montrer que la cardinalité de $\mathcal{F}(X)^\times$ est $n!$, où n est la cardinalité de X.

Exercice 11. Soit $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ les classes d'équivalence des entiers modulo n muni de la multiplication modulaire.

a. Dresser la table du groupe $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^\times$.

b. Dresser la table du groupe $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^\times$.

c. Montrer qu'il n'existe pas une façon d'ordonner les éléments pour que les tables coïncident.

Sous-groupes

Exercice 12. Soient G un groupe abélien et $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > 0$.

a. Montrer que $\{g^n : g \in G\}$ est un sous-groupe de G.

b. Donner un groupe G *non* abélien et $n > 0$ tels que $\{g^n : g \in G\}$ n'est pas un sous-groupe de G.

Exercice 13. Soient H une *partie* d'un groupe G et g un élément de G. On pose

$$gHg^{-1} = \left\{g^{-1}hg : h \in H\right\}.$$

Montrer que H est un sous-groupe de G ssi gHg^{-1} est un sous-groupe de G.

Faire les exercices suivants dans les notes de cours :

- ☐ 7.1.13
- ☐ 7.1.15
- ☐ 7.1.16
- ☐ 7.1.17
- ☐ 7.1.18