Feuille d'exercices 4

Groupes symétriques

Les exercices suivants dans les notes de cours :

7.1.27 ; 7.1.28 ; 7.1.30 ; 7.1.31 ; 7.1.32

Exercice 1. Soient G un groupe et g un élément de G. On définit une application $\lambda_g : G \to G$ par $\lambda_g(a) = ga$. Montrer que l'application λ_g est une permutation de l'ensemble G.

Exercice 2. Montrer que toute permutation de S_n s'exprime comme un produit fini des permutations suivantes :

a. $(1,2)$, $(1,3)$, $(1,4)$, …, $(1,n)$.

b. $(1,2)$, $(1,2,3,\ldots,n)$.

c. $(1,2)$, $(2,3,\ldots,n)$.

Exercice 3. Soient A, B et C les parties suivantes du groupe symétrique S_4 :

$$\begin{aligned} A &= \{\sigma \in S_4 : \sigma(1) = 3\} \\ B &= \{\sigma \in S_4 : \sigma(2) = 2\} \\ C &= \{\sigma \in S_4 : \sigma(1) = 3 \text{ et } \sigma(2) = 2\}\,. \end{aligned}$$

Déterminer si A, B et C sont sous-groupes de S_4.

Exercice 4. Montrer que si σ est un cycle de longueur impair, alors σ^2 est aussi un cycle.

Exercice 5. Soit α une permutation dans S_n, où $n \geq 3$. Montrer que si $\alpha\beta = \beta\alpha$ pour tout $\beta \in S_n$, alors α est l'élément neutre de S_n.

Exercice 6. Trouver un élément d'ordre maximal dans les groupes symétriques S_n pour $n \in \{3, 4, \ldots, 10\}$.

Sous-groupes et ordres

Exercice 7. Soit H l'ensemble des matrices de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ de la forme $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & c \end{smallmatrix}\right)$ et soit K l'ensemble des matrices de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ de la forme $\left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

a. Montrer que H est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.

b. Montrer que K est un sous-groupe H.

c. Déterminer les éléments de H d'ordre 2.

d. Trouver deux éléments A et B de H d'ordre 2 et tels que l'ordre de AB est infini.

e. Montrer que K est isomorphe à $\mathbb{R}$ muni de l'addition.

Homomorphismes

Les exercices suivants dans les notes de cours :

7.2.1 ; 7.2.3

Exercice 8. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Si M est une matrice, alors on note par M^t sa transposée. On définit une application $f : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ par $f(M) = (M^{-1})^t$. Montrer que f est un isomorphisme de groupes.

Exercice 9. Pour tous nombres $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, posons $x * y = x + y - xy$.

a. Montrer que $*$ est une opération sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

b. Montrer que l'ensemble $(\mathbb{R} \setminus \{1\}, *)$ est un groupe abélien.

c. Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\}$ l'application définie par

$$f(x) = 1 - \frac{1}{x}.$$

Montrer que f est un homomorphisme de groupes, où on munit $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ de la multiplication de nombres réels et $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ de l'opération $*$.

d. Montrer que f est un isomorphisme de groupes.