Feuille d'exercices 5

Exercice 1. On considère les sous-groupes suivants du groupe symétrique S_4.

$$H = \Big\langle (1,2),\ (2,3) \Big\rangle, \qquad K = \Big\langle (2,3),\ (3,4) \Big\rangle, \qquad L = \Big\langle (1,2),\ (3,4) \Big\rangle$$

a. Quels sont les ordres de H, K et L ?

b. Dresser la table de multiplication de ces sous-groupes. Sont-ils abéliens ?

c. Que remarquez-vous ?

Exercice 2. Soient a et b les matrices suivantes de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$.

$$a = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

a. Montrer que $\mathrm{ordre}(a) = 4$ et $\mathrm{ordre}(b) = 3$.

b. Montrer que $\mathrm{ordre}(ab) = \infty$. En déduire que le sous-groupe $H = \langle \{a, b\} \rangle$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ est d'ordre infini.

Exercice 3. Soit I et J les deux matrices suivantes de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$.

$$I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a. Dresser la table du sous-groupe $Q = \langle \{I, J\} \rangle$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$.

b. Calculer l'ordre de tout élément de Q.

c. Calculer les sous-groupes de Q.

d. Calculer le centre de Q.

e. Existe-t-il un élément $a \in Q$ tel que $Q = \langle a \rangle$?

Exercice 4. Soit D_4 le groupe diédral du carré.

a. Écrivez tous les éléments de D_4 comme des permutations des sommets du carré.

b. Dresser la table de multiplication de D_4.

c. Calculer l'ordre de D_4.

d. Calculer l'ordre de tout élément de D_4.

e. Calculer les sous-groupes de D_4.

f. Calculer le centre de D_4.

g. Existe-t-il un élément $a \in D_4$ tel que $D_4 = \langle a \rangle$?

Exercice 5. Existe-t-il un isomorphisme entre les groupes Q et D_4 ?

Exercice 6. Soient G un groupe et a un élément de G.

a. Montrer que si $a^k = e$, alors $\mathrm{ordre}(a)$ divise k.
(Rappel : $\mathrm{ordre}(a)$ est le plus petit entier $n > 0$ tel que $a^n = e$.)

b. Supposons que G est un groupe *abélien fini*. Montrer que $a^{|G|} = e$ et en déduire que $\mathrm{ordre}(a)$ divise l'ordre de G, si G est un groupe abélien fini.

Exercice 7.

a. Montrer que l'ensemble

$$G = \left\{ \begin{bmatrix} a & 5b \\ b & a \end{bmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Q},\ (a,b) \neq (0,0) \right\}.$$

muni de la multiplication ordinaire des matrices est un groupe.

b. Montrer que l'ensemble

$$H = \left\{ a + b\sqrt{5} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Q},\ (a,b) \neq (0,0) \right\}.$$

muni de la multiplication ordinaire des nombres réels est un groupe.

c. Montrer que G et H sont isomorphes.

Exercice 8. Montrer que l'application exponentielle $e^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ est un isomorphisme de groupes, où $\mathbb{R}_+^*$ est l'ensemble de nombres réels strictement postitifs muni de la multiplication de nombres réels.

Exercice 9. Soient $f : G \to G'$ et $g : G' \to G''$ deux homomorphismes de groupes.

a. Montrer que la composition $g \circ f$ est un homomorphisme de groupes de G dans G''.

b. En déduire que l'ensemble de homomorphisme de groupes de G dans G est un monoide.

Exercice 10. Soient $f : G \to G'$ un homomorphisme de groupes et H un sous-groupe de G'. Montrer que l'ensemble $f^{-1}(H) = \{a \in G : f(a) \in H\}$ est un sous-groupe de G.

Exercice 11 ! Soit G un groupe.

a. Montrer que $Z(G) = \{a \in G : ab = ba$ pour tout $b \in G\}$ est un sous-groupe de G.

b. Soit H un sous-groupe de G tel que si H' est un sous-groupe non trivial de G, alors $H \subseteq H'$. Montrer que $H \subseteq Z(G)$.

Exercice 12 ! Soit G un groupe fini dont l'élément neutre est noté e et tel que pour tous $a, b \in G$ différent de e, il existe un isomorphisme $\sigma : G \to G$ tel que $\sigma(a) = b$. Montrer que G est un groupe abélien.

Exercice 13 ! Soit G un groupe fini dont l'élément neutre est noté e. Soit $\varphi : G \to G$ un isomorphisme tel que si $\varphi(g) = g$, alors $g = e$.

a. Montrer que tout élément de G s'exprime sous la forme $g^{-1}\varphi(g)$.

b. Si φ est d'ordre 2, montrer que $\varphi(g) = g^{-1}$ pour tout $g \in G$ et que G est un groupe abélien d'ordre impair.