Feuille d'exercices 6

Exercice 1.

a. Montrer que les groupes $\mathbb{R}^*$ et $\mathbb{C}^*$ ne sont pas isomorphes.

b. Montrer que les groupes $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}$ ne sont pas isomorphes.

c. Montrer que les groupes $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ ne sont pas isomorphes.

Exercice 2. Montrer que l'application f donnée est un homomorphisme et calculer son noyau et son image.

a. $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ définie par $f(x) = 1/x$.

b. $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ définie par $f(z) = |z|$.

c. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$ définie par $f(x) = \cos(x) + i\sin(x)$.

Exercice 3.

a. Soient G' un groupe et $f : \mathbb{Z}/31\mathbb{Z} \to G'$ un homomorphisme non trivial. Montrer que f est injectif.

b. Soient G un groupe et $g : G \to \mathbb{Z}/23\mathbb{Z}$ un homomorphisme non trivial. Montrer que g est surjectif.

Exercice 4.

a. Existe-t-il un homomorphisme surjectif $f : \mathbb{Z}/24\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$?

b. Existe-t-il un homomorphisme injectif $f : \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$?

Exercice 5. Soient $f : G \to H$ et $g : H \to K$ des homomorphismes de groupes. Montrer que $g \circ f$ est trivial ssi $\mathrm{im}(f) \subseteq \ker(g)$.

Exercice 6. Montrer que si $f : G \to H$ est un homomorphisme de groupes injectif et si H est abélien, alors G est abélien.

Exercice 7. Soit $G = \langle a \rangle$ un groupe monogène d'ordre fini n. On considère la fonction

$$f : \mathbb{Z} \to G$$

définie par $f(k) = a^k$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

a. Montrer que f est une homomorphisme de groupes surjectif.

b. Montrer que $\ker(f) = n\mathbb{Z}$.

c. Montrer que G est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Exercice 8. Montrer que le groupe symétrique S_3 est isomorphe à $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

Exercice 9. Soit $n \geq 2$. On appelle *signature d'une permutation* $\alpha \in S_n$ le nombre $\mathrm{sign}(\sigma)$ défini par

$$\mathrm{sign}(\alpha) = \prod_{i<j} \frac{\alpha(i) - \alpha(j)}{i - j}$$

Ce produit porte sur tous les couples (i, j) tels que $1 \leq i < j \leq n$. Par exemple, si $\alpha = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{smallmatrix}\right)$,

$$\begin{aligned} \mathrm{sign}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} &= \left(\frac{\alpha(1) - \alpha(2)}{1-2}\right) \times \left(\frac{\alpha(1) - \alpha(3)}{1-3}\right) \times \left(\frac{\alpha(2) - \alpha(3)}{2-3}\right) \\ &= \left(\frac{2-3}{1-2}\right) \times \left(\frac{2-1}{1-3}\right) \times \left(\frac{3-1}{2-3}\right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

a. Calculer la signature de tous les éléments de S_3.

b. Montrer que toute transposition de S_n est de signature -1.

c. Montrer que la fonction sign est un homomorphisme de S_n dans le groupe multiplicatif $\{1, -1\}$.

Exercice 10. Pour $\alpha \in \mathbb{Q}^*$ on pose $f_\alpha : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ l'application définie par

$$f_\alpha(x) = \alpha x$$

pour tout $x \in \mathbb{Q}$.

a. Montrer que f_α est un automorphisme de $\mathbb{Q}$.

b. Montrer que l'application $\alpha \mapsto f_\alpha$ est un isomorphisme de $\mathbb{Q}^*$ vers le groupe de automorphisme de $\mathbb{Q}$.

Exercice 11. Trouver tous les automorphismes du groupe $(\mathbb{Z}, +)$.

Exercice 12 ! Trouver tous les automorphismes du groupe $(\mathbb{Q}, +)$.

Exercice 13 ! Soient D un groupe d'ordre $2n$, où n est impair, et H un sous-groupe de G d'ordre n tel que $xhx^{-1} = h^{-1}$ pour tout $h \in H$ et tout $x \in D \setminus H$. Montrer que H est abélien et que tout élément de $D \setminus H$ est d'ordre 2.

Exercice 14 ! Trouver tout groupe G qui admet un isomorphisme $f : G \to G$ vérfiant

$$f(x)^{-1} = f^{-1}(x)$$

pour tout $x \in G$.