Feuille d'exercices 7

Exercice 1. Trouver un sous-groupe du groupe symétrique S_4 isomorphe à $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times$.

Exercice 2. Soit H le sous-groupe suivante du groupe symétrique S_4 :

$$H = \Big\{(),\ (1,2),\ (3,4),\ (1,2)(3,4)\Big\}.$$

a. À l'aide du Théorème de Cayley, trouver un sous-groupe V de S_4 tel que $V \cong H$ et $V \neq H$.

b. Montrer qu'il existe $\sigma \in S_4$ tel que $\sigma H \neq H\sigma$.

c. Montrer que $\sigma V = V\sigma$ pour tout $\sigma \in S_4$.

Exercice 3. Calculer $[3\mathbb{Z} : 15\mathbb{Z}]$.

Exercice 4. Soient G un groupe, H un sous-groupe de G et $g \in G$. Montrer que $gH = H$ ssi $g \in H$.

Exercice 5. Soit $m \geq 3$. À l'aide du théorème de Lagrange, montrer que l'ordre du groupe $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$ est pair.

Exercice 6. Soient G un groupe fini et H et K des sous-groupes de G tels que $\mathrm{pgcd}(|H|, |K|) = 1$. Montrer que $H \cap K = \{e\}$, où e est l'élément neutre de G.

Exercice 7. Soient G un groupe et $f : G \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ un morphisme de groupes surjectif. Montrer que $[G : \ker(f)] = 2$.