

## Feuille d'exercices 9

**Exercice 1.** Soient  $G$  un groupe et  $H$  un sous-groupe de  $G$ . Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes.

- a.  $H \triangleleft G$ .
- b.  $gHg^{-1} = H$  pour tout  $g \in G$ .
- c.  $gHg^{-1} \subseteq H$  pour tout  $g \in G$ .
- d.  $ghg^{-1} \in H$  pour tout  $g \in G$  et pour tout  $h \in H$ .

**Exercice 2.** Soit  $SL_n^{\pm}(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices  $n \times n$  de déterminant 1 ou  $-1$ . Montrer que  $SL_n^{\pm}(\mathbb{R})$  est un sous-groupe normal de  $SL_n(\mathbb{R})$  et un sous-groupe normal de  $GL_n(\mathbb{R})$ .

**Exercice 3.** Soient  $H$  et  $K$  deux sous-groupe de  $G$  tels que  $H \leq K$ . Montrer que si  $H \triangleleft G$ , alors  $H \triangleleft K$ .

**Exercice 4.** Soit  $H = \{(), (1, 3)(2, 4)\} \subseteq S_4$ .

- a. Montrer que  $H$  est un sous-groupe de  $S_4$  qui n'est pas normal dans  $S_4$ .
- b. Montrer que  $H$  est un sous-groupe normal de  $V = \{(), (1, 3)(2, 4), (1, 2)(3, 4), (1, 4)(2, 3)\}$ .

**Exercice 5.** Soit  $Q = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$  muni de l'opération pour laquelle  $1$  est l'élément neutre de  $Q$ ;  $(-1)x = -x = x(-1)$  pour tout  $x \in Q$ ; et  $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ .

- a. Montrer que  $Q$  est isomorphe au groupe défini dans Exercice 3 de la Feuille d'Exercices 5.
- b. Montrer que tout sous-groupe de  $Q$  est normal dans  $Q$ .

**Exercice 6.** Soit  $H$  un sous-groupe de  $G$  tel que  $\varphi(H) = H$  pour tout automorphisme  $\varphi$  de  $G$ . Montrer que  $H$  est un sous-groupe normal de  $G$ .

**Exercice 7.** Soit  $N$  un sous-groupe normal de  $G$ . Si  $n = [G : N]$  est fini, montrer que  $g^n \in N$  pour tout  $g \in G$ .

**Exercice 8.** Soit  $H$  un sous-groupe de  $\mathbb{Q}$ . Montrer que si  $[\mathbb{Q} : H]$  est fini, alors  $H = \mathbb{Q}$ .

**Exercice 9.** Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $G$  un groupe fini tel que  $(xy)^n = x^n y^n$  pour tous  $x, y \in G$ . On définit deux sous-ensemble de  $G$  :

$$G^{(n)} = \{x^n : x \in G\}$$

$$G_{(n)} = \{z \in G : z^n = e\}.$$

Montrer que  $G_{(n)}$  et  $G^{(n)}$  sont des sous-groupes normaux de  $G$ .

**Exercice 10.** Soit

$$T = \{z \in \mathbb{C} : \|z\| = 1\},$$

où  $\|z\|$  est le module d'un nombre complexe  $z$ .

- a. Montrer que  $T$  est un sous-groupe normal de  $\mathbb{C}^*$ .
- b. Montrer que  $T \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ .

**Exercice 11.** Soit  $H$  un sous-groupe d'un groupe  $G$ . Le *cœur* de  $H$  dans  $G$  est

$$H^\heartsuit = \bigcap_{g \in G} gHg^{-1}.$$

- a. Montrer que  $H^\heartsuit$  est un sous-groupe de  $G$  contenu dans  $H$ .
- b. Montrer que  $H^\heartsuit$  est normal dans  $G$ .
- c. Montrer que si  $N$  est un sous-groupe normal de  $G$  tel que  $N \subseteq H$ , alors  $N \subseteq H^\heartsuit$ .  
(Autrement dit,  $H^\heartsuit$  est le plus grand sous-groupe normal de  $G$  contenu dans  $H$ .)
- d. En déduire que  $H \triangleleft G$  ssi  $H^\heartsuit = H$ .