Devoir 1

à remettre le *3 février 2015*

Exercice 1.

Soient a, b et c trois points distincts dans le plan complexe. Montrer que a, b et c forme une triangle équilatéral si et seulement si

$$a^2 + b^2 + c^2 = bc + ca + ab.$$

Exercice 2.

Soit $X \subseteq \mathbb{C}$.

- L'*intérieur* de $X \subseteq \mathbb{C}$, noté X°, est le plus grand ouvert inclus dans X.
- Un point $z \in \mathbb{C}$ est un *point intérieur* à X ssi X est un voisinage de z.

a. Montrer que l'intérieur de X est l'union de tous les ouverts inclus dans X.

b. Montrer que l'intérieur de X est l'ensemble de points intérieurs à X.

c. Montrer qu'un point non intérieur à X est adhérent au complémentaire $\mathbb{C} \setminus X$.

Exercice 3.

Soit $U \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert et soit A un partie de U.

On dit que A *est fermé dans* U si tout point d'accumulation de A qui appartient à U appartient également à A.

Montrer que A est fermé dans U ssi $U \setminus A$ est ouvert.

Exercice 4.

Montrer que si la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ est absolument convergente, alors $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$ converge.

Exercice 5.

Déterminer les rayons de convergences des séries entières suivantes :

a. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{3n}}{8^n + 1}$ *b.* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (2^n + 3^n)\, z^n$ *c.* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) z^n$