Devoir 2

à remettre le *24 mars 2015*

Exercice 1. Soit f une fonction analytique sur un ouvert connexe U de $\mathbb{C}$. Montrer que :

a. Si f' est identiquement nulle sur U, alors la fonction f est constante sur U.

b. Si pour tout point z de U on a $f(z) = 0$ ou $f'(z) = 0$, alors f est constante sur U.

Exercice 2.

a. Soit $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction *continue* telle que $g(z) = g\left(\frac{z}{2}\right)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Montrer que g est constante sur $\mathbb{C}$.

b. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction *holomorphe* telle que $f(\frac{z}{2}) = \frac{1}{2}f(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Montrer qu'il existe une constante $c \in \mathbb{C}$ telle que $f(z) = cz$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 3. Soit f une fonction analytique sur un ouvert connexe $U \subseteq \mathbb{C}$ et $z_0 \in U$ tels que

$$\exp(f(z_0)) = z_0 \qquad \text{et} \qquad f'(z) = \frac{1}{z}$$

pour tout z de U. Montrer que f est une détermination du logarithme.

(*Indice : considérer* $g(z) = \frac{\exp(f(z))}{z}$.)

Exercice 4. Soit

$$f(z) = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \cdots .$$

a. Montrer que $f'(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$ sur le disque $D(0,1)$.

b. Trouver le rayon de convergence de la série sans utiliser aucun test de convergence.

c. Montrer que

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

Exercice 5. Supposer que f soit dérivable au sens complexe sur un ouvert U de $\mathbb{C}$. Soit $z_0 \in U$. Montrer que la fonction $g : U \to \mathbb{C}$ définie par

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} & \text{si } z \neq z_0 \\[2ex] f'(z_0) & \text{si } z = z_0 \end{cases}$$

est dérivable au sens complexe sur U.