# Examen Intra 2 / Devoir 3

à remettre le *16 avril 2015*

*Instructions.*

1. Il faut justifier toutes vos assertions clairement et proprement ; en particulier, il faut indiquer les résultats que vous utilisez.
2. Dans un problème en plusieurs parties, vous pouvez utiliser le résultat d'une partie précédente, même si vous ne l'avez pas résolu.

## Exercice 1.

Soit $U$ un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ qui contient le disque *fermé* $\overline{D(0,r)}$ de centre 0 et rayon $r$. Pour tout $z \in D(0,r)$, on définit

$$C_z = \sup_{\omega \in C(0,r)} \frac{r}{\left|\omega - z\right|},$$

où $C(0,r)$ est le cercle de centre 0 et rayon $r$.

*a.* Soit $f$ une fonction holomorphe sur $U$. Montrer que

$$\left|f(z)\right| \leq C_z\, N_f \qquad \text{pour tout } z \in D(0,r),$$

où

$$N_f = \sup_{\omega \in C(0,r)} \left|f(\omega)\right|.$$

*b.* Montrer que si $f$ est une fonction holomorphe sur $U$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k > 0$,

$$\left|f(z)\right|^k \leq C_z\, N_f^k \qquad \text{pour tout } z \in D(0,r).$$

*c.* Montrer que si $f$ est une fonction holomorphe sur $U$, alors

$$|f(z)| \leq N_f \qquad \text{pour tout } z \in D(0,r).$$

*d.* Soit $f$ une fonction holomorphe sur $U$ tel que $|f|$ est constante sur $C(0,r)$. Montrer que soit $f$ est constante sur $U$ ou soit $f$ possède au moins un zéro dans $D(0,r)$.

*Indices:*

— *Montrer que $|f|$ est constant sur $D(0,r)$ ; on peut utiliser le fait (sans preuve) que si $|f|$ est constant sur $D(0,r)$, alors $f$ est constante sur $D(0,r)$.*

— *Utiliser les parties précédentes.*

**Exercice 2.**

*a.* Soit $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la fonction complexe

$$g(x+iy) = x + ixy^2.$$

Trouver les points où la fonction $g$ est dérivable au sens complexe.

*b.* Soit

$$h(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$$

une fonction analytique sur un ouvert connexe $U$. Supposer que

$$3\,u(x,y) + 4\,v(x,y) = 16$$

pour tout $x+iy \in U$. Montrer que la fonction $h$ est constante sur $U$.

**Exercice 3.**

*a.* Soit $\gamma$ le segment de 1 à $i$ donné par

$$\begin{array}{rcl} \gamma : [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \gamma(t) & = & (1-t)+ti \end{array}$$

Évaluer

$$\int_\gamma f(z)\,dz,$$

où $f(x+iy) = x^2 + iy^2$.

*b.* Évaluer

$$\int_{C(1,2)} \frac{z^3}{(z-1)^2}\,dz.$$

*c.* Montrer que

$$\int_{C(\frac{\pi}{4},1)} \frac{\sin(z)}{\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^6}\,dz = \frac{\sqrt{2}\,\pi}{120}\,i.$$

**Bonus !**

Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1 et telle que $a_n \in \mathbb{R}$ et $a_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que le point 1 est un point singulier pour $f$.