Toute suite de fonctions qui vérfie le critère de Cauchy est uniformément convergente

Franco Saliola

28 janvier 2015

Une démonstration détaillée du fait que toute suite de fonctions qui vérfie le critère de Cauchy est uniformément convergente.

Théorème 1 *Soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions complexes sur $X \subseteq \mathbb{C}$. Si $\{f_n\}$ vérifie le critère de Cauchy, alors $\{f_n\}$ est uniformément convergente.*

Démonstration. Il faut montrer qu'il existe $L : X \to \mathbb{C}$ telle que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq N$, alors $\|f_n - L\| < \varepsilon$.

Définition. Une suite de fonctions $\{f_n\}$ sur X *converge uniformément* sur X s'il existe une fonction $L : X \to \mathbb{C}$ telle que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq N$, alors $\|f_n - L\| < \varepsilon$.

Fonction limite $L : X \to \mathbb{C}$. Comme la suite de fonctions $\{f_n\}$ vérifie le critère de Cauchy, la suite de nombres complexes $\{f_n(w)\}$, pour $w \in X$, est convergente.[1] On définit une fonction $L : X \to \mathbb{C}$ où $L(z)$ est la limite de la suite de nombres complexes $\{f_n(z)\}$: explicitement,

$$L(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z).$$

$\{f_n\}$ converge uniformément vers L. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\{f_n\}$ vérifie le critère de Cauchy[2] et $\varepsilon/4 > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que[3]

$$\|f_n - f_m\| < \varepsilon/4 \qquad \text{si } m, n \geq N. \tag{1}$$

Soit $n \geq N$. Pour montrer que $\|f_n - L\| < \varepsilon$, on montrera que $|f_n(z) - L(z)| \leq \varepsilon/2$ pour tout $z \in X$.[4]

Soit $z \in X$. Comme $L(z)$ est la limite de la suite de nombres complexes $\{f_n(z)\}$, il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que[5]

$$|f_m(z) - L(z)| < \varepsilon/4 \qquad \text{si } m \geq N'. \tag{2}$$

Soit $m = \max\{N, N'\}$.[6] Alors,

$$\begin{aligned} |f_n(z) - L(z)| &= |f_n(z) - f_m(z) + f_m(z) - L(z)| \\ &\leq |f_n(z) - f_m(z)| + |f_m(z) - L(z)| \\ &\leq \|f_n - f_m\| + |f_m(z) - L(z)| \\ &< \varepsilon/4 + \varepsilon/4 = \varepsilon/2, \end{aligned}$$

où la dernière inégalité découle de (1) et (2), car $n, m \geq N$ et $m \geq N'$.

□

1. Soit $w \in X$ et $\varepsilon > 0$. Car $\{f_n\}$ vérifie le critère de Cauchy, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\|f_m - f_n\| < \varepsilon$ si $m, n \geq N$. D'où,
$$|f_m(w) - f_m(w)| \leq \|f_m - f_n\| < \varepsilon.$$
2. *Définition.* $\{f_n\}$ vérifie le *critère de Cauchy* si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\|f_n - f_m\| < \varepsilon$ si $m, n \geq N$.
3. Noter que N *ne dépend pas* de $z \in X$.
4. Si $|f_n(z) - L(z)| \leq \varepsilon/2$ pour $z \in X$,
$$\|f_n - L\| = \sup_{z\in X} \{|f_n(z) - L(z)|\} \leq \varepsilon/2.$$
5. En général, N' dépend de z.
6. Donc, on a que $m \geq N$ et $m \geq N'$.