Problème 1 de l'examen final

Problème 1.

Soit f une fonction holomorphe sur l'anneau

$$A = \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\},$$

où r et R sont deux nombres réels tels que $0 < r < R$.

a. Montrer que si

$$|f(z)| \leq |z|^{-\frac{1}{2}} \qquad \text{pour tout } z \in A,$$

alors les coefficients a_n de la série de Laurent de f en 0 vérifient

$$|a_n| \leq \frac{1}{r^{n+\frac{1}{2}}} \qquad \text{pour tout entier } n.$$

b. Montrer que si f est holomorphe sur le disque *épointé*

$$D = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < R\}$$

et

$$|f(z)| \leq |z|^{-\frac{1}{2}} \qquad \text{pour tout } z \in D,$$

alors 0 est un point régulier pour f.